因數與倍數

1.設 $a|b$ ，$a|c$ 且 m , n 爲任意整數，則 $a|mb+nc$

2.輾轉相除法原理：設 a , $b\in N$，若以 b 除 a 所得的商爲 q，餘數爲 r ，即 $a=bq+r$ ，則 $(a,b)=(b,r)$

3.設自然數 $n=p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdots\cdots p_k^{r_k}$，其中 p_1 , p_2 , $\cdots$, p_k 爲 k 個相異的正質數，r_1 , r_2 , $\cdots$, r_k 爲 k 個正整數，則

(1) 自然數 n 共有 $(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_k+1)$ 個正因數。

(2) n 的所有正因數的和爲 $(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{r_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{r_2})$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1+p_k+\cdots+p_k^{r_k})$$

即 $$\frac{(p_1^{r_1+1}-1)(p_2^{r_2+1}-1)\cdots\cdots(p_k^{r_k+1}-1)}{(p_1-1)(p_2-1)\cdots\cdots(p_k-1)}$$

(3) n 的所有正因數的積為 $n^{\frac{1}{2}(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_k+1)}$

(4)小於 n 而與 n 互質的自然數共有

$$n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\text{個。}$$

4.設 a , b , c 皆為整數，其中 a , b 互質。若方程式 $ax+by=c$ 有一組整數解為 $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$ ，則其一般整數解為 $\begin{cases} x=x_0+bt \\ y=y_0-at \end{cases}$ ， $t\in Z$

5.設 a 為大於 1 的正整數。若 a 不是質數，則 a 必定有小於或等於 $\sqrt{a}$ 的正因數。

有理數 實數 複數

1. 整數的離散性：設 a ,b 爲不同的二整數，則 $|a-b|\geq 1$

2. 有理數的稠密性：設 r ,s 爲不同的二有理數，則 r ,s 之間至少有一個有理數存在。

3. 設 $a, b, c, d\in R$ ，則 $a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c$ 且 $b=d$

4. 設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 爲 $x^3=1$ 的一根，則 $\omega^3=1$ ，$1+\omega+\omega^2=0$

5. 設 α, β 皆爲複數，則 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ ，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$

一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

1. 有理根 $\Longleftrightarrow D=(\text{有理數})^2$，但 a, b, c 爲有理數。

2. 整數根：a, b, c 爲整數。

解法 1. 求以二根 α, β 爲未知數的方程式的整數解。

解法 2. 先假定二根爲實數，在 $D \geq 0$ 的範圍內加以選取。

3. 正根與負根：

(1) 二正根 $\Longleftrightarrow D \geq 0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

(2) 二負根 $\Longleftrightarrow D \geq 0$，$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$

(3) 一正一負根 $\Longleftrightarrow \alpha\beta<0$

根的位置

4.根的位置：

(1)有二根皆大於 $k \Longleftrightarrow D \geqq 0$，$\dfrac{-b}{a} > 2k$，$af(k) > 0$

(2)有二根皆小於 $k \Longleftrightarrow D \geqq 0$，$\dfrac{-b}{a} < 2k$，$af(k) > 0$

(3)有一根大於 k，另一根小於 $k \Longleftrightarrow af(k) < 0$

自然數列

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$, $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

4. $\sum_{k=1}^{n} \{k(k+1)\cdots(k+m)\} = \frac{1}{m+2} n(n+1)\cdots(n+m)(n+m+1)$

5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)}$

$$= \frac{1}{m}\left\{\frac{1}{1\cdot 2\cdots m} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots n+m}\right\}$$

等差數列

1.設一等差數列之首項為 a_1，公差為 d，第 n 項為 a_n，首 n 項和為 S_n，則

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d$

(2) $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$

(3) $S_n = \frac{1}{2}n[2a_1 + (n-1)d]$

等比數列

2.設一等比數列之首項為a_1，公比為r，第n項為a_n首n項和為S_n，

則 (1) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

(2) $r = 1$時，$S_n = n \cdot a_1$

$r \neq 1$時，$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

等差與等比中項

a , b , c 三數

(1) b 為 a , c 的等差中項（算術平均者）$\Longleftrightarrow b=\dfrac{a+c}{2}$

(2) b 為 a , c 的等比中項（幾何平均者）$\Longleftrightarrow b^2=ac$ （$\neq 0$）

無窮級數的和

1.無窮等比級數：$a_1+a_1r+\cdots+a_1r^{n-1}+\cdots\cdots$

$$-1<r<1\text{時，}S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}$$

2.無窮級數的和 S

設 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，則 $S=\lim_{n\to\infty}S_n$

3.循環小數：$x=a.b_1b_2\cdots b_m\overline{c_1c_2\cdots c_n}$

可由 $10^{m+n}x-10^mx$ 求得 $x=\dfrac{ab_1b_2\cdots c_n-ab_1b_2\cdots b_m}{\underbrace{99\cdots9}_{n\text{個}}\underbrace{00\cdots0}_{m\text{個}}}$

數學歸納法

1.起頭由 $n=1$ 驗證命題成立，還是由 $n=1$ ，$n=2$ 驗證命題成立，等等，必須與所用之遞迴式配合。

2.題目限制 n 的起始值時，必須由該起始值開始。

二元一次方程式

1. $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ $\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\triangle_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\triangle_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(i) $\triangle \neq 0$ 時，恰有一解 $\left(\dfrac{\triangle_x}{\triangle},\dfrac{\triangle_y}{\triangle}\right)$

(ii) $\triangle=0$ 時，$\triangle_x=\triangle_y=0$ 時，表二直線重合，$\triangle_x^2+\triangle_y^2\neq 0$，表二平行直線

三元一次方程式

2. $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 爲相異方程式

(i) $\triangle \neq 0$ 恰有一解 $\left(\frac{\triangle_x}{\triangle}, \frac{\triangle_y}{\triangle}, \frac{\triangle_z}{\triangle}\right)$

(ii) $\triangle = 0$ $\triangle_x^2+\triangle_y^2+\triangle_z^2=0$ 表三平面平行或共線。

(iii) $\triangle = 0$ $\triangle_x^2+\triangle_y^2+\triangle_z^2\neq 0$ 表三平面交線兩兩平行或兩平行平面與第三平面相交。

接上頁

3. $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 三相異線共點時則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$

二次函數

1. $y=f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

(1) $a>0$ 時，極小 $f(-\frac{b}{2a})=\frac{4ac-b^2}{4a}$

(2) $a<0$ 時，極大 $f(-\frac{b}{2a})=\frac{4ac-b^2}{4a}$

2. $f(x)=ax^2+bx+c$ 值恒大於 $0 \Longleftrightarrow a>0$ ，$D<0$ ，

頂點爲 $(\frac{-b}{2a}\ \frac{-b^2+4ac}{4a})$　　焦點 $(\frac{-b}{2a}\ \frac{-b^2+4ac+1}{4a})$

準線 $y=\frac{-b^2+4ac-1}{4a}$

條件不等式

1.一次不等式 $ax+b>0$ （$a\neq 0$）之解：

$a>0$ 時 $x>-\dfrac{b}{a}$ ， $a<0$ 時 $x<-\dfrac{b}{a}$

2.二次不等式：

(1)設 $\alpha<\beta$ 則 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 之解為 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 之解為 $\alpha<x<\beta$

接上頁

(2) $ax^2+bx+c>0$　（$a\neq 0$）之解：

(i) $D=b^2-4ac>0$ 時，若 $a>0$ 則 $x>\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ 或

$x<\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ 若 $a<0$ 則 $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}<x<\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

(ii) $D=0$ 時，若 $a>0$ 則 $x\neq -\dfrac{b}{2a}$ 若 $a<0$ 則無解。

(iii) $D<0$ 時，若 $a>0$ 則 x 為任意實數，若 $a<0$ 則無解。

(3) $ax^2+bx+c<0$　（$a\neq 0$）之解：

兩邊乘以 -1 可化為上列(2)之情形。

接上頁

3.設 $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a, b, c\in R, a\neq 0)$

(1) $\forall x\in R$ ，$f(x)>0 \Longleftrightarrow a>0$ ，$b^2-4ac<0$

(2) $\forall x\in R$ ，$f(x)<0 \Longleftrightarrow a<0$ ，$b^2-4ac<0$

4.三次不等式：

設 $\alpha<\beta<\gamma$ 則 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$ 之解爲 $\alpha<x<\beta$ 或 $x>\gamma$

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)<0$ 之解爲 $x<\alpha$ 或 $\beta<x<\gamma$

接上頁

5.分式不等式：

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \Longleftrightarrow f(x)\ g(x)>0$

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Longleftrightarrow f(x)\ g(x)\geq 0$ 且 $g(x)\neq 0$

6.無理不等式：

(1) $f(x)>\sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow g(x)\geq 0$ ，$f(x)>0$，且 $[f(x)]^2>g(x)$

(2) $f(x)<\sqrt{g(x)} \Longleftrightarrow \{g(x)\geq 0$ ，$f(x)\geq 0$ 且 $[f(x)]^2<g(x)\}$

或 $\{g(x)\geq 0$ ，$f(x)<0\}$

(3)利用 $y=f(x)$ 與 $y=\sqrt{g(x)}$ 之圖形可求 $f(x)>\sqrt{g(x)}$

或 $f(x)<\sqrt{g(x)}$ 之解。

絕對不等式

1.設 $a, b, c \in R$，則 $\left||a|-|b|\right| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$

2.設 a, b, c 均爲正數則 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

3.設 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 均爲正數，則

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}$$

（等號限於 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ 時成立）

接上頁

4.設 $a, b, c \in R$ 則 $a^2+b^2 \geq ab$ ，$a^2+b^2+c^2 \geq bc+ca+ab$

5.設 $a, b, c, x, y, z \in R$ 則 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ ，

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) > (ax+by+cz)^2$

6.設 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ；$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n \in R$ 則

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$

（等號限於 $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots\cdots = a_n : b_n$ 時成立）

最大值 最小值

1.設 $f(x)=ax+b$ （ $a\neq 0$ ），$x\in[\alpha,\beta]$ 時，若 $a>0$

則 $M=f(\beta)$ ，$m=f(\alpha)$，若 $a<0$ 則 $M=f(\alpha)$ ，$m=f(\beta)$

2.設 $f(x)=ax^2+bx+c$ （ $a\neq 0$ ）， $x\in R$ 時

若 $a>0$ 則 $m=f(-\dfrac{b}{2a})=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ，

若 $a<0$ 則 $M=f(-\dfrac{b}{2a})=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

接上頁

3.設 $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$， $x \in [\alpha, \beta]$ 時

利用拋物線，比較 $f(-\frac{b}{2a})$，$f(\alpha)$，$f(\beta)$ 之大小可決定 M，m

4. $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 〔$f(x)$，$g(x)$ 均爲次數不大於 2 之多項式〕，$x \in R$ 時

若去分母所得 $f(x)-y \cdot g(x)=0$ 爲 x 之 2 次方程式，則利用判別式 $D \geq 0$ 可求 y 之範圍；若可能（x^2 之係數）$=0$ 時，先求 x 之值。

5. $y=f(x)+a+\dfrac{b}{f(x)}$ 其中 $f(x)>0$ 時可利用

（算術平均數）≥（幾何平均數）

6.設 x_1 , x_2 , …… , x_n 均為正數

(1)若 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$ 爲定值，則當 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ 時，

積 $x_1x_2\cdots\cdots x_n$ 爲最大。

(2)若 $x_1x_2\cdots\cdots x_n$ 爲定值，則當 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ 時，

和 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$ 爲最小。

接上頁

7.利用柯西（$Cauchy$）不等式：

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)$$
$$\geq(a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n)^2$$

8. 線性規劃：平面上一區域D（凸集合）為定義域，欲求一次函數 $ax+by+c$ 之最大值或最小值時，先作平行線系 $ax+by+c=k$（k為參數），其中若有一直線經過D區域之一個頂點（x_0，y_0）而不經過D區域之內部則 ax_0+by_0+c 為最大值或最小值。

多項式

因式與倍式

1.餘式定理：多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的餘式等於 $f(a)$

當 $a \neq 0$ 時，多項式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的餘式等於 $f(\frac{b}{a})$

2.因式定理：多項式 $f(x)$ 有 $x-a$ 的因式之充要條件爲 $f(a)=0$

當 $a \neq 0$ 時，多項式 $f(x)$ 有 $ax-b$ 的因式之充要條件爲 $f(\frac{b}{a})=0$

常用公式

(1) $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

(2) $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots\cdots+y^{n-1})$

(3) $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots+y^{n-1})$，$n=$ 奇數

(4) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

一次因式檢驗法

4. 一次因式檢驗法（牛頓定理）

設 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 爲一整係數多項式，若有整係數一次式因式 $ax-b$ ，a，b 互質，則 $a\mid a_n$ 且 $b\mid a_0$

(1)有理根：設 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in Z(x)$，若 $\dfrac{b}{a}$ 爲 $f(x)=0$ 的一有理根，則 $a\mid a_n$ ，$b\mid a_0$ ，（$Z(x)$ 表整係數多項式集合）。

(2)若 $a_n=1$ 且 $f(x)=0$ 有有理根，則此有理根必爲一整數根。

拉格蘭日法

5.拉格蘭日法：過(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)三點的二次多項式函數，可寫為

$$f(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

6.設 $f(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$

若有多於 n 個的數 x_i 使 $f(x_i)=0$ ，則 $a_n=\cdots\cdots=a_0=0$

7.以一多項式表另一多項式：

$f(x)=a_n(\alpha x-\beta)^n+\cdots\cdots+a_1(ax-\beta)+a_0$ ，欲求

a_n ，$\cdots\cdots$ ，a_1 ，a_0 ，可用綜合除法。

接上頁

8.求餘式：

(1)以 $(x-a)(x-b)$ 除 $f(x)$ →可設 $A(x-a)+B$

(2)以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $f(x)$ →可設

$A(x-a)(x-b)+B(x-a)+C$

對稱式

9.對稱式：a ,b ,c 的對稱式形式如下：

1次→ $\ell(a+b+c)$

2次→ $\ell(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)$

3次→ $\ell(a^3+b^3+c^3)+m(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)$

$+kabc$

泰勒展開式

10.泰勒展開式：

若 $f(x)$ 爲一多項式， $a\in R$，則 $f(x)$ 可表爲下的形式，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n$$

(1)以 $(x-a)^2$ 除 $f(x)\rightarrow$其餘式爲 $f(a)+f'(a)(x-a)$

(2)以 $(x-a)^3$ 除 $f(x)\rightarrow$其餘式爲 $f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

一元n次方程式

1. 代數基本定理：n 次方程式（$n \geq 1$）至少有一個複數根。

2. n 次方程式恰有 n 個根。（二重根算爲兩個根）

3. 虛根定理：$f(x)=0$ 爲實係數方程式，a，$b \in R$，若 $a+bi$ 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $a-bi$ 亦必爲 $f(x)=0$ 之根。

接上頁

4.設 a，b，m 皆為有理數，其中 $b \neq 0$，$m>0$，$\sqrt{m}$ 為無理數。

若有理係數一元 n 次方程式 $f(x)=0$ 有一根為 $a+b\sqrt{m}$，則此方程式必有另一根為 $a-b\sqrt{m}$（必須要會證明）。

5.設 a，b，m 皆為有理數，其中 $b \neq 0$，$m>0$，$\sqrt[3]{m}$ 為無理數，若有理係數一元 n 次方程式 $f(x)=0$ 有一根為 $a+b\sqrt[3]{m}$，則此方程式必有另二根為 $a+b\sqrt[3]{m}\,\omega$，$a+b\sqrt[3]{m}\,\omega^2$，其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

中間值與堪根定理

6. 多項函數的中間值定理：

設 $f(x)$ 是一個多項函數，如果 m 是介於 $f(a)$，$f(b)$ 之間的任一數，那麼在 a，b 之間必有一實數 c 滿足 $f(c)=m$

7. 勘根定理：設 $f(x)$ 為一連續函數，a，b 爲二實數，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 必有一根介於 a，b 之間。

接上頁

8.根與係數的關係：設 α ，β ，γ 為 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三根，則

$\alpha+\beta+\gamma=-p$ ，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$ ，$\alpha\beta\gamma=-r$

9.重根定理：若 α 為 n 次方程式 $f(x)=0$ 之 k 重根，則 α 為

$f'(x)=0$ 之 $k-1$ 重根。

根的變換

10.方程式根的變換與新方程式：

A. 將 $f(x)=0$ 的根作下列變換，求新方程式：

(1)負根變換（各根改符號），$f(-x)=0$ ，方法：變奇次項的符號。

(2)倍根變換（各根取 k 倍），$f(\frac{x}{k})=0$

方法：以 1，k，k^2，……順次乘各項。

(3)倒根變換（各根做倒數），$f(\frac{1}{x})=0$

方法：將所有係數反轉排列之。

(4)減根變換：（各根減去 k，$f(x+k)=0$）

方法：用綜合除法求之。

一般變換

B. 一般變換：設 $f(x)=0$ 的根爲 α,β,γ，欲求以 $\rho(\alpha)$，$\rho(\beta)$，$\rho(\gamma)$ 爲根的方程式，可由 $f(x)=0$ 與變換式 $y=\rho(x)$ 消去 x，則所得 y 的方程式爲所求。