$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

□原則：

同除 A $\Rightarrow$ $x^4 + \frac{B}{A}x^3 + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A} = 0$

即 $\Rightarrow$ $x^4 + B'x^3 + C'x^2 + D'x + E' = 0$

以 $(x + \frac{B'}{4})$表之$\Rightarrow$ $(x + \frac{B'}{4})^4 + p(x + \frac{B'}{4})^2 + q(x + \frac{B'}{4}) + r = 0$

求解 $\Rightarrow$ $t^4 + pt^2 + qt + r = 0$ 四根

則 $t_1 - \frac{B'}{4}, t_2 - \frac{B'}{4}, t_3 - \frac{B'}{4}, t_4 - \frac{B'}{4}$ 即得x的四個根

$$D = 4(p^2 + 12r)^3 - (2p^3 - 72pr + 27q^2)^2$$

判別式：
$$\begin{cases} D > 0 \Rightarrow \text{四實根 } or \text{ 四虛根} \\ D = 0 \Rightarrow \text{至少兩相等實根} \\ D < 0 \Rightarrow \text{兩實根兩虛根} \end{cases}$$

【方法一】尤拉(Euler)方法

解 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

□精神：
$$\begin{cases} \text{1.利用四次方公式及 } 2x = u + v + w \Rightarrow \text{比較係數} \\ \text{2.利用三次方公式解係數方程式}(u^2\text{、}v^2\text{、}w^2\text{的值}) \\ \text{3.再帶回}x = \dfrac{u + v + w}{2}\text{求解四次方乘式四個根} \end{cases}$$

【解】：1° 設 $2x = u + v + w$

平方 $4x^2 = (u^2 + v^2 + w^2) + 2(uv + vw + wu)$

移項再平方 $\left(4x^2 - (u^2 + v^2 + w^2)\right)^2 = \left(2(uv + vw + wu)\right)^2$

$$16x^4 - 8x^2(u^2+v^2+w^2) + (u^2+v^2+w^2)^2 = 4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) + 8uvw\underline{\underline{(u+v+w)}}$$

$$16x^4 - 8x^2(u^2+v^2+w^2) + (u^2+v^2+w^2)^2 = 4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) + 8uvw(\underline{\underline{\ 2x\ }})$$

$$x^4 - \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)x^2 - (uvw)x + \frac{1}{16}\left[u^4+v^4+w^4-2(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)\right] = 0$$

$$x^4 + \quad p \cdot x^2 \quad + \ q \cdot x + \quad r \quad = 0$$

2° 比較係數 $\therefore \begin{cases} p = -\dfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \\ q = -uvw \\ r = \dfrac{1}{16}\left[u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2)\right] \end{cases}$

3° 可解出 $\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -2p \\ u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = p^2 - 4r \\ u^2v^2w^2 = q^2 \end{cases}$

利用三次方根與係數知

4° 此時 u^2, v^2, w^2 爲 $z^3 + \underline{\underline{2p}} \cdot z^2 + \underline{\underline{(p^2 - 4r)}} \cdot z \underline{\underline{- q^2}} = 0$ 之三根

令 $\begin{cases} a = 2p \\ b = p^2 - 4r \\ c = -q^2 \end{cases}$ 代入公式(II) 解出 u^2 , v^2 , w^2 後

5° 得 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u + v + w) \\ or \quad \dfrac{1}{2}(u - v - w) \\ or \quad \dfrac{1}{2}(-u + v - w) \\ or \quad \dfrac{1}{2}(-u - v + w) \end{cases}$

【方法二】笛卡爾(Descartes)方法

解 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

□精神：$\begin{cases} \text{1.強迫分解出四次式爲兩個二次式乘積} \\ \text{2.利用比較係數解出}k\text{、}l\text{、}m\text{三者關係式(爲三次式)} \\ \text{3.利用公式}(II)\text{解出}k\text{(及}l\text{、}m\text{)} \\ \text{4.將結果代入兩個二次式中解出四個根} \end{cases}$

【證明】：1° 設 $x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + kx + l)\cdot(x^2 - kx + m) = 0 \cdots (1)$

乘開比較係數：$\begin{cases} m + l - k^2 = p \cdots (2) \\ k\cdot(m - l) = q \cdots (3) \\ l\cdot m = r \cdots (4) \end{cases}$

由(2)，(3) 解出$(m，l) = \left(\dfrac{q + pk + k^3}{2k}, \dfrac{-q + pk + k^3}{2k}\right)\cdots(5)$ 代入(4)

2° $\dfrac{q + pk + k^3}{2k} \times \dfrac{-q + pk + k^3}{2k} = \dfrac{(k^3 + pk)^2 - q^2}{4k^2} = r$

$\Rightarrow (k^2)^3 + 2p(k^2)^2 + (p^2 - 4r)(k^2) - q^2 = 0$

$\Rightarrow k^2 = z \cdots (6)$

$\Rightarrow k^2$ 爲 $z^3 + 2p\cdot z^2 + (p^2 - 4r)\cdot z - q^2 = 0$ 之一根

代入公式 (II) 可得三根 z_1、z_2、z_3

3°利用(5)及(6)解出k、l、m再代回(1)式

利用二次方公式解解出

所得即爲四次方程式之解

【方法三】費拉里(Ferrari)方法

解 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

□精神：
$$\begin{cases} 1.\text{同加}\underline{\underline{x^2y + \dfrac{y^2}{4}}}\text{強迫分解出四次式爲兩個多項式的平方差} \\ 2.\text{利用比較係數解出}y\text{的三次式} \\ 3.\text{利用公式}(II)\text{解出}y \\ 4.\text{將}y\text{代入二次式中解出四個根} \end{cases}$$

【證明】: 1° $x^4 + px^2 + qx + r = 0 \Rightarrow x^4 = -px^2 - qx - r$

兩邊同加 $x^2y + \dfrac{y^2}{4}$ $\Rightarrow x^4 + (x^2y + \dfrac{y^2}{4}) = -px^2 - qx - r + (x^2y + \dfrac{y^2}{4})$

兩邊配方 $\underline{\underline{(x^2 + \dfrac{y}{2})^2}} = \underline{\underline{(y - p)x^2 - qx + (\dfrac{y^2}{4} - r)}} \cdots (1)$

∵是完全平方　　∴必是完全平方

2°故判別式 $= D = (-q)^2 - 4(y - p)\cdot(\dfrac{y^2}{4} - r) = 0$

展開得 $y^3 - p\cdot y^2 - 4r\cdot y + (4pr - q^2) = 0$

代入公式(II) 得三根 y_1、y_2、y_3 $(y \neq p)$

3° ∴(1)式 可整理得$(x^2 + \dfrac{y}{2})^2 = (y - p)\left[x - \dfrac{q}{2(y - p)}\right]^2 \cdots (2)$

$$x^2 + \frac{y}{2} = \pm\sqrt{(y - p)}\cdot\left[x - \frac{q}{2(y - p)}\right]$$

4° 將y_1、y_2、y_3上式結果代入 $x^2 \mp \sqrt{(y - p)}\,x + (\dfrac{y}{2} \pm \dfrac{q}{2\sqrt{(y - p)}}) = 0$

並利用二次方程式公式解解x，

所得即爲 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$四次方程式之解

資料整理:103 班 23 號 張林承