雙曲線之漸近線與共軛雙曲線

令 $g(x,y) = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$

且假設 $g(x,y)=0$ 為一雙曲線，其中心 $\begin{cases}2ax+by+d=0\\bx+2cy+e=0\end{cases}$ 為 (h,k)

試證：

(1) 雙曲線 $g(x,y)=0$ 之漸近線方程式為 $g(x,y)-g(h,k)=0$

(2) 雙曲線 $g(x,y)=0$ 之共軛雙曲線方程式為 $g(x,y)-2g(h,k)=0$

證明：

若雙曲線方程式為 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，

則其漸近線方程式為 $b^2x^2-a^2y^2=0$，即 $(bx+ay)(bx-ay)=0$；

共軛雙曲線方程式為 $b^2x^2-a^2y^2=-a^2b^2$，即 $(bx+ay)(bx-ay)=-a^2b^2$

(1)可令 $g(x,y)=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)-r$，

其中 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$ 為其漸近線，即 $g(x,y)+r=0$

因為 (h,k) 為漸近線之交點，

故 (h,k) 滿足 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$，

即 $(a_1h+b_1k+c_1)(a_2h+b_2k+c_2)=0$

亦即 $g(h,k)=(a_1h+b_1k+c_1)(a_2h+b_2k+c_2)-r=-r$，$r=-g(h,k)$

故雙曲線 $g(x,y)=0$ 之漸近線方程式 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$

即為 $g(x,y)-g(h,k)=0$

(2) 雙曲線 $g(x,y)=0$，可表成 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)-r=0$，

即 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=r$

承(1) $r=-g(h,k)$，

故雙曲線又可表成 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=-g(h,k)$

而 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=-(-g(h,k))$ 為其共軛雙曲線方程式

故 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)-g(h,k)=0$ 即為其共軛雙曲線方程式

亦即 $(g(x,y)-g(h,k))-g(h,k)=0$，也就是 $g(x,y)-2g(h,k)=0$