1. 設 $f(x)=4x^3-5$, $g(x)=x^2-x$, 試證：存在一實數α介於 1 與 2 之間使 $f(\alpha)=g(\alpha)$

$\boxed{解}$ $f(x)=4x^3-5$，$g(x)=x^2-x$

$[f(1)-g(1)]\cdot[f(2)-g(2)]=(4-5-1+1)\cdot(32-5-4+2)$

$=(-1)\cdot(25)<0$ ∴$\exists 1<\alpha<2$ ∋ $f(\alpha)-g(\alpha)=0$

2. 設 $f(x)$為一實係數多項函數, 若 $f(0)>0$, $f(1)<1$, 試證：存在一實數 c 介於 0 與 1 之間使 $f(c)=c^2$

$\boxed{解}$ 令 $g(x)=f(x)-x^2$

$g(0)\cdot g(1)=(f(0)-0)\cdot(f(1)-1)<0$ （∵$f(0)>0$，$f(1)<1$）

∴$\exists 0<c<1$ ∋ $g(c)=0$，即 $f(c)=c^2$

3. 設 $a_1<a_2<a_3$, 而 b_1, b_2, b_3 為正數. 試證方程式：$\dfrac{b_1}{x-a_1}+\dfrac{b_2}{x-a_2}+\dfrac{b_3}{x-a_3}=1$ 有三個相異實根

$\boxed{解}$ $\dfrac{b_1}{x-a_1}+\dfrac{b_2}{x-a_2}+\dfrac{b_3}{x-a_3}=1$

$\Rightarrow b_1(x-a_2)(x-a_3)+b_2(x-a_1)(x-a_3)+b_3(x-a_1)(x-a_2)-(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=0$

令 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)-b_1(x-a_2)(x-a_3)-b_2(x-a_1)(x-a_3)-b_3(x-a_1)(x-a_2)$

∵$f(a_1)<0$，$f(a_2)>0$，$f(a_3)<0$

∴(a_1, a_2)，(a_2, a_3)間各有一根

又另一根必為實根(虛根共軛定理)

4. 方程式 $f(x)=x^3+x-8=0$, 試證：(1)有一實根介於 1 與 2 之間 (2)此根為一無理數

5. 設 $f(x)=2x^3+7x^2+3x-3$，證明在區間(0, 1)中必存在一實數 p 使得 $f(p)=5p+1$

$\boxed{解}$ $g(x)=f(x)-(5x+1)=2x^3+7x-2x-4$

∵$g(0)\cdot g(1)=(-4)\cdot(3)<0$

∴$\exists 0<p<1$∋$g(p)=0$，即 $f(p)=5p+1$.

6. 設 $f(x)=2x^3+7x^2+3x-3$，試證：在 0 與 1 之間有一實數 a 使得 $f(x)=3a+2$

$\boxed{解}$ $f(0)\cdot f(1)=(-3)\cdot 9<0$

7. 試簡述『勘根定理』的內容(2)設 $f(x)=x^3-2x^2+5$, $g(x)=2x^2+6x-7$, 試證：存在一數 c 在 0 與 1 之間, 使得 $f(c)+g(c)=2c^2$ 成立

$\boxed{解}$ (1)已知 $f(x)$為一實係數多項式, 若 $f(a)\cdot f(b)<0$, 則方程式 $f(x)=0$ 必有一根在 a 與 b 之間 .

(2)令 $H(x)=f(x)+g(x)-2x^2=x^3-2x^2+6x-2$，則 $h(0)=0-0+0-2=-2$，

$H(1)=1-2+6-2=3$，∴$H(0)\cdot h(1)<0$ 故由勘根定理可知：

$h(x)=0$ 必有一根 c 在 0 與 1 之間，即 $H(c)=0\rightarrow f(c)+g(c)-2c^2=0$，故 $f(c)+g(c)=2c^2$ 得證

8. 設 f(x)與 g(x)是定義在[a , b]的兩連續函數，且滿足 f(a)<g(a)，f(b)>g(b) . 試證有一介於 a 與 b 之間的實數 c 存在，使得 f(c)=g(c)

$\boxed{解}$ 設 h(x)=f(x)−g(x)，則 h(x)在[a , b]連續，而且 h(a)=f(a)−g(a)<0，

$h(b)=f(b)-g(b)>0$，故由勘根定理知，在(a,b)有一實數 c 存在，使得 $h(c)=0$，亦即 $f(c)=g(c)$．

9. 設 $f(x)=(x-a)^2(x-b)^2+x$, 其中 $a<b$, 試證方程式 $f(x)=\frac{1}{2}(a+b)$, 在(a, b)至少有一根

解 設 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}(a+b)$，則 $g(x)$為一多項函數，故在$[a,b]$連續．又因 $g(a)=\frac{1}{2}(a-b)<0$，$g(b)=\frac{1}{2}(b-a)>0$，
故由勘根定理知，在(a,b)至少有一實數 c 存在，使得 $g(c)=0$，即 $f(c)=\frac{1}{2}(a+b)$．因此方程式 $f(x)=\frac{1}{2}(a+b)$在(a,b)至少有一根．

10. 若 $f(x)$與 $g(x)$是定義在$[a,b]$的兩連續函數，且滿足 $f(x)=g(x)+k$，$k\in R$，已知 $f(a)>k$，$f(b)<k$．試證 $g(x)$在(a,b)至少有一根

解 $\because f(x)=g(x)+k \Rightarrow g(x)=f(x)-k$，
$\therefore g(a)=f(a)-k>0$，
$g(b)=f(b)-k<0$，
$\Rightarrow g(a)\times g(b)<0$，
由勘根定理知，
必存在至少有一實數 $c\in(a,b)$，
使得 $g(c)=0$，故得證

11. 設 $f(x)$為區間$[0,2]$上之連續函數，證明方程式 $f(x)=\frac{1}{5}f(\frac{1}{5})+\frac{3}{10}f(\frac{3}{10})+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$有一根介於 0 與 2 之間

解 若 $f(\frac{1}{5})=f(\frac{3}{10})=f(\frac{1}{2})$
$\Rightarrow f(x)=(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2})f(\frac{1}{5})=f(\frac{1}{5})$，
此時取 $x=\frac{1}{5}$或$\frac{3}{10}$或$\frac{1}{2}$，即得證．
若 $f(\frac{1}{5})$，$f(\frac{3}{10})$，$f(\frac{1}{2})$不全相等，我們令
M為 $f(\frac{1}{5})$，$f(\frac{3}{10})$，$f(\frac{1}{2})$中之最大值；
m為 $f(\frac{1}{5})$，$f(\frac{3}{10})$，$f(\frac{1}{2})$中之最小值．
因 $m<\frac{1}{5}f(\frac{1}{5})+\frac{3}{10}f(\frac{3}{10})+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})<M$，
由中值定理知存在 $c\in(\frac{1}{5},\frac{1}{2})$，即 $c\in(0,2)$，
使得 $f(c)=\frac{1}{5}f(\frac{1}{5})+\frac{3}{10}f(\frac{3}{10})+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$，
故 c 為方程式 $f(x)=\frac{1}{5}f(\frac{1}{5})+\frac{3}{10}f(\frac{3}{10})+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$之一根

12. 設 $f(x)=x^5+x^3-1$，$g(x)=x^4-6x$，試證：在 0 與 1 之間有一個實數 r 使 $g(r)$

$=f(r)-2r$。

【證明】：

欲使 $g(r)=f(r)-2r$，$f(r)-g(r)-2r=0$，取 $h(x)=f(x)-g(x)-2x$，只要證明方程式 $h(x)=0$ 在 0 與 1 之間有一實數即可，此時 $h(x)=(x^5+x^3-1)-(x^4-6x)-2x=x^5-x^4+x^3+4x-1$ $h(x)$ 在 R 上為連續函數，又 $h(0)=-1$，$h(1)=1-1+1+4-1=4$，由勘根定理可知，$h(x)=0$ 在區間 $(0，1)$ 內有一實根，所以本命題得證

13. 證明：方程式 $3^x+x^2-x-8=0$ 至少有一正實根。

【證明】：

令 $f(x)=3^x+x^2-x-8$，則 f 在 R 上連續，又 $f(2)=9+4-2-8=3$，$f(1)=3+1-1-8=-5$，所以 $f(1)f(2)<0$，因此 $f(x)=0$ 在區間 $(1，2)$ 內有一實根，亦即 $3^x+x^2-x-8=0$ 至少有一實根

14. 設函數 $f(x)=x^5+3x^3-2$，試證：在 0 與 1 之間，有一個實數 a 使得 $f(a)=a$。

【證明】：

我們定義函數 $g：R\to R$ 如下：

$g(x)=f(x)-x=(x^5+3x^3-2)-x=x^5+3x^3-x-2$

因為 $g(x)$ 是多項函數，所以 $g(x)$ 是 R 上的連續函數。又因為

$g(0)=-2<0$

$g(1)=1+3-1-2=1>0$，依據中間值定理知：必有一個 $a\in R$ 使得 $g(a)=0$。因為 $g(a)=f(a)-a=0$，所以必有一個 $a\in R$ 使得 $f(a)=a$

15. 已知 $\dfrac{1}{2}$ 是方程式 $6x^4+7x^3+5x^2-x+a=0$ 的一根，其中 a 為一定數，且它在兩個連續整數 n 與 $n+1$ 之間有一負根，則 $n=$__________。

[解]：$\dfrac{1}{2}$ 是 $6x^4+7x^3+5x^2-x+a=0$ 的根時，$6\times\dfrac{1}{16}+7\times\dfrac{1}{8}+5\times\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+a=0$，因此 $a=-2$ 且 $6x^4+7x^3+5x^2-x-2=(2x-1)(3x^3+5x^2+5x+2)$，令 $f(x)=3x^3+5x^2+5x+2$，則 $f(x)$ 在 R 上為連續函數，又 $f(0)=2$，$f(-1)=-3+5-5+2=-1$，所以 $f(0)f(-1)<0$ 由勘根定理可知 $f(x)=0$ 在 $(-1，0)$ 區間內有一實根，即原方程式在 -1 與 0 之間有一負根，所以 $n=-1$

16. 已知 $x^3-3x^2+10x+60=0$ 恰有一實根，且它在兩個連續整數 n 與 $n+1$ 之間，則 $n=$__________。

[解]：

令 $f(x)=x^3-3x^2+10x+60$，則 $f(x)$ 為 R 上的連續函數，$f(-3)=-27-27-30+60=-24$，$f(-2)=-8-12-20+60=20$，由勘根定理知，$f(x)=0$ 在 $(-3，-2)$ 區間內有一實根，所以 $n=-3$

17. 設 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2-3x-2a=0$ 在開區間 $(-2，-1)$ 與 $(1，2)$ 各恰有一實根，則實數 a 的範圍為__________。

[解]：

因為 $f(x)=0$ 在開區間 $(-2，-1)$，$(1，2)$ 各恰有一實根，依據勘根定理知：

$$\begin{cases} f(-2)f(-1)<0 \\ f(1)f(2)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-10a+30)(-3a+6)<0 \cdots ① \\ (-a)(6a+18)<0 \cdots ② \end{cases}$$

由①解得 $2<a<3$；由②解得 $a<-3$ 或 $a>0$

兩者取交集，可得 $2<a<3$

18. 設方程式 $f(x)=12x^3-8x^2-23x+11=0$ 在開區間$(a，a+1)$，$(b，b+1)$，$(c，c+1)$各有一根，若 a，b，$c\in Z$ 且 $a<b<c$，則 $b=$__________，而 $a+b+c=$__________。

[解]：

利用綜合除法計算 $f(x)$的一些函數值如下表：

x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$	-71	14	11	-8	29

因為 $f(-2)f(-1)<0$，$f(0)f(1)<0$，$f(1)f(2)<0$

所以由勘根定理知：$f(x)=0$ 在開區間$(-2，-1)$，$(0，1)$，$(1，2)$各恰有一實根。

因此 $a=-2$，$b=0$，$c=1$，亦即 $a+b+c=-1$

19. 設函數 $f(x)=x^5+3x^3-2$，求證：在 0 與 1 之間，存在 $a\in R$，使得 $f(a)=a$。

[解]：【提示】設 $F(x)=f(x)-x$，則 $F(0)<0$，$F(1)>0$

20. 設 a，b 為正數，證明 $x^3+ax+b=0$ 只有一個負根。

【證明】：

令 $f(x)=x^3+ax+b$，$x\in \mathrm{R}$，再求 $f(x)$的導函數為

$f'(x)=3x^2+a$

因為 a 為正數，所以對於任意實數 x，$f'(x)>0$ 恆成立，因此 $f(x)$在 R 上為嚴格遞增函數。因為 $f(x)$為實係數奇次多項函數，故 $f(x)=0$ 至少有一實根，因此 $f(x)=0$ 恰有一實根。又

(1)已知 $b>0$，因此 $f(0)=b>0$；

(2)因為 $f(x)=x^3+ax+b$ 是實係數奇次多項函數，

故 $f(-\infty)=-\infty<0$。

根據勘根定理知：$f(x)=0$ 在$(0,-\infty)$恰有一負根。