指數與對數

指數

1.設 $a>0$ ， $m,n\in N$ 規定

$$a^0=1 \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n$$

2.設 $a>0$, $b>0$ ， $m,n\in Q$,則 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} , \quad (a^m)^n=a^{mn} , \quad (ab)^n=a^n b^n \quad , \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$$

3.設 $a>0$, $b>0$ ， $\alpha,\beta\in R$ 定義實數指數後

可證 $a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$ ， $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$ ， $(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$

指數函數

$y = f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$

1. 對於任意 $x \in R$，恰有一個 $y > 0$ 使 $a^x = y$

而 $f(0) = 1$，$f(1) = a$

2. 對於任意 $x_1, x_2 \in R$ 恆有 $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$

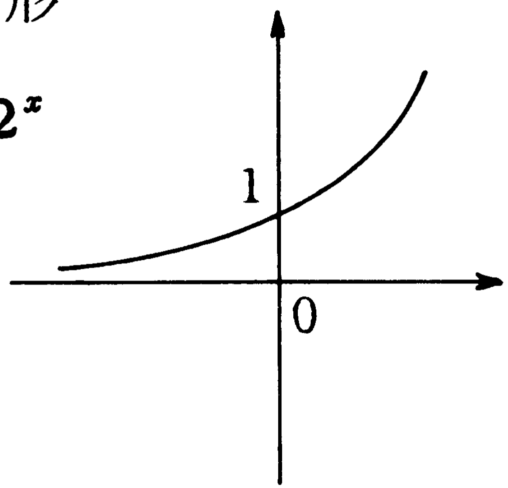
3. (1)當 $a > 1$ 時，$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

(2)當 $0 < a < 1$ 時，$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

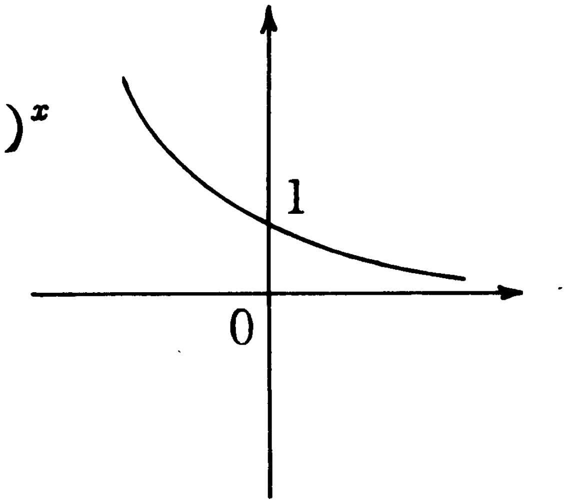
基本圖形

4. 基本 圖形

(1) $y=2^x$



(2) $y=(\frac{1}{2})^x$



指數方程式之解法

:(a , b 爲不等於 1 之正數)

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$

2. $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow f(x)\log a = g(x)\log b$

3. 代換法 (令 $a^{f(x)} = t$)

指數不等式之解法

（ a 為不等於 1 之正數 ）

1. $a>1$ 時 $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)>g(x)$

2. $0<a<1$ 時 $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x)<g(x)$

3. 代換法

對數

1.設 $a>0$ ，$a\neq 1$ 若 $x=a^y$ （$x>0$，$y\in R$） 則稱 y 爲

「以 a 爲底，x 之對數」記爲 $y=log_a x$ 即 $x=a^y \Longleftrightarrow y=log_a x$

(註)： $x=a^{log_a x}$ ，　$y=log_a a^y$

2.設 $a>0$ ，$a\neq 1$ ，$M>0$ ，$N>0$ 則

(1) $log_a 1=0$ ，$log_a a=1$　　(2) $log_a MN=log_a M+log_a N$

(3) $log_a \dfrac{M}{N}=log_a M-log_a N$ （$log_a \dfrac{1}{M}=-log_a M$）

(4) $log_a M^r=r\ log_a M$ （$r\in R$）

(註)： 設 a，M，N 爲不等於 1 之正數則 $M^{log_a N}=N^{log_a M}$

接上頁

3.設 a , b , c , m 為不等於 1 之正數 , $d>0$,則

(1) $log_a b = \dfrac{1}{log_b a}$

(2) $log_a b = \dfrac{log_m b}{log_m a}$

(3) $log_a b = log_{a^r} b^r$ ($r \in R$, $r \neq 0$)

(4) $log_a b \cdot log_b c \cdot log_c d = log_a d$

對數函數

$y = f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$

1.對於任意 $x > 0$，恰有一個 $y \in R$ 使 $\log_a x = y$

而 $f(1) = 0$，$f(a) = 1$

2.對數函數爲指數函數之反函數

3.對於任意 $x_1, x_2 > 0$ 恆有 $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

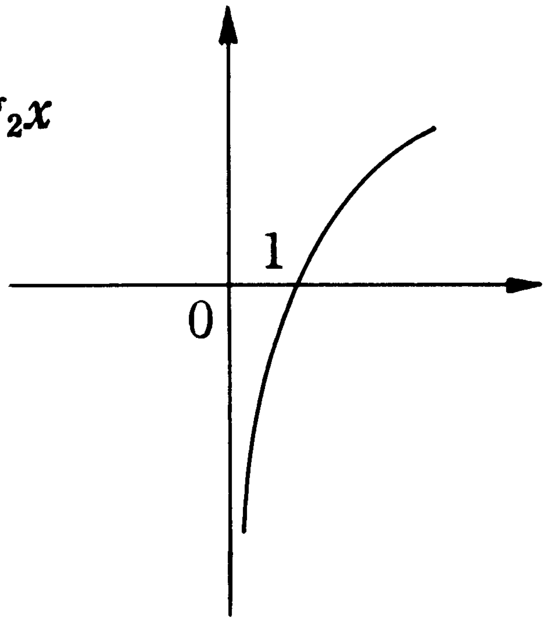
4.(1)當 $a > 1$ 時 $0 < x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

(2)當 $0 < a < 1$ 時 $0 < x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

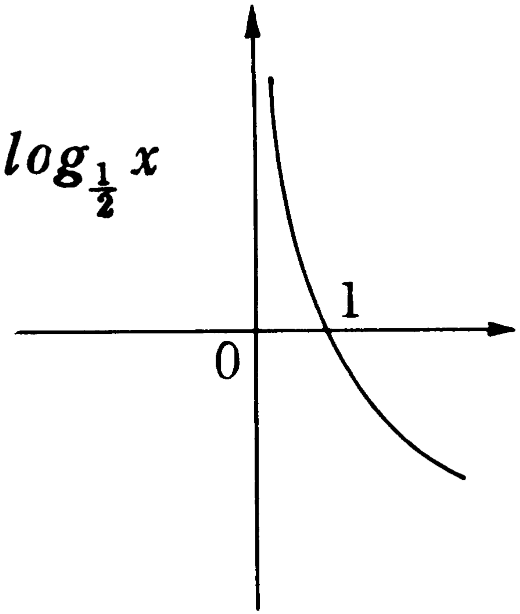
基本圖形

5.基本圖形

(1) $y = log_2 x$



(2) $y = log_{\frac{1}{2}} x$



對數方程式之解法

1. $log_a f(x) = log_a g(x) \Rightarrow a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) = g(x) > 0$

2.代換法（令 $log_a f(x) = t$ ）

對數不等式之解法

1.當 $a>1$ 時 $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x)>g(x)>0$

2.當 $0<a<1$ 時 $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Longleftrightarrow 0<f(x)<g(x)$

3.代換法

常用對數

1.當 $a > 1$ 時 $log_a f(x) > log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) > g(x) > 0$

2.當 $0 < a < 1$ 時 $log_a f(x) > log_a g(x) \Longleftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$

3.代換法

3.(1)若$M \geq 1$ 且M之整數部分爲 n 位數，則 $\log M$之首數爲 $n-1$

即 $n-1 \leq \log M < n$ （$10^{n-1} \leq M < 10^{n}$ ）

(2)若 $0 < M < 1$ 且M在小數點後最初 $n-1$ 位數爲 0 ，而小數第 n 位

不爲 0 ，則 $\log M$之首數爲$-n$ ，

即$-n \leq \log M < -n+1$ （$\frac{1}{10^{n}} \leq M < \frac{1}{10^{n-1}}$ ）

4. 若兩正數M ，N 之各位數字排列相同，僅有小數點位置不同，則

$\log M$與 $\log N$之尾數相同。

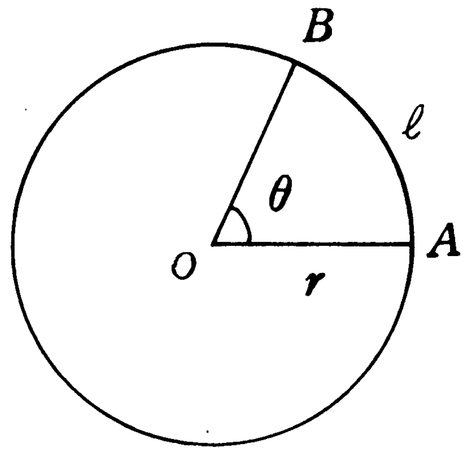
三角函數

角度 弧度 扇形面積

1. π 弧度 $= 180°$ ，1 弧度 $= \dfrac{180°}{\pi} \fallingdotseq 57°17'45''$

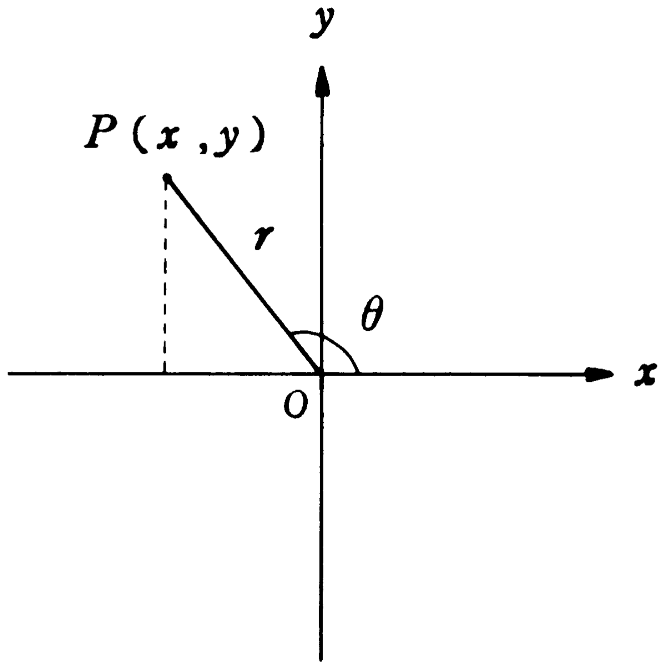
$1° = \dfrac{\pi}{180}$ 弧度 $\fallingdotseq 0.01745$ 弧度

2. 圓心爲 O ，半徑爲 r 之圓中，設圓心角 $\angle AOB$ 之弧度量爲 θ ，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 之長爲 l ，扇形 AOB 之面積爲 S 則 $l = r\theta$ ，$S = \dfrac{1}{2} r l = \dfrac{1}{2} r^2\theta$



三角函數之定義

1.定義：坐標平面上，設 $P(x, y)$ 爲廣義角 θ 之終邊上一定點，$\overline{OP}=r$ 則



$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x},$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y},\ \sec\theta=\frac{r}{x},\ \csc\theta=\frac{r}{y}$$

三角函數間之關係

(1) $sin\theta\ csc\theta = 1$ ， $cos\theta\ sec\theta = 1$ ， $tan\theta\ cot\ \theta = 1$

$$tan\theta = \frac{sin\ \theta}{cos\ \theta} \quad , \quad cot\ \theta = \frac{cos\ \theta}{sin\ \theta}$$

$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ ， $1 + tan^2\theta = 1$ ， $1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

接上頁

(2)

x	$2\pi+\theta$	$-\theta$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$
$\sin x$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$
$\cos x$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
$\tan x$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$

週期

3.週期：設 P 爲異於 0 之一常數，對於函數 f 之定義域中之任一數 x，若 $f(x+P)=f(x)$ 恆成立，則稱 f 爲週期函數。

若 P 爲使 $f(x+P)=f(x)$ 成立之最小正數，則 P 稱爲 f 之週期。

(1) $\sin x$，$\cos x$，$\sec x$，$\csc x$ 之週期均爲 2π。

$\tan x$，$\cot x$ 之週期爲 π。

(2)若函數 $f(x)$ 之週期爲 P，則函數 $f(mx)$，$f(mx+a)$（$m>0$，a 爲常數）之週期爲 $\frac{P}{m}$

和差公式

4.兩角和差之三角函數值

(1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

(4) $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

特殊角函數值

（註） $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ， $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\tan 15^\circ = \cot 75^\circ = 2-\sqrt{3}$ ， $\cot 15^\circ = \tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$

常用公式

(1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

(3)設 a，b 不均為 0，則

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$$

其中　$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\beta$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta$

倍角公式

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(2) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

(3) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ， $\cot 2\theta = \dfrac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$

(4) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(5) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(6) $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$

(7) $\cot 3\theta = \dfrac{3\cot\theta - \cot^3\theta}{1-3\cot^2\theta}$

接上頁

(註)(1) $(\sin\theta \pm \cos\theta)^2 = 1 \pm \sin 2\theta$

(2) $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

(3) $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

半角公式

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\quad,\quad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

(註) (1)根號前之符號視$\frac{\theta}{2}$所在象限而定。

接上頁

(2) $$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}, \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

接上頁

(3) $\sin 22.5^\circ = \cos 67.5^\circ = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos 22.5^\circ = \sin 67.5^\circ = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\tan 22.5^\circ = \cot 67.5^\circ = \sqrt{2}-1$

$\cot 22.5^\circ = \tan 67.5^\circ = \sqrt{2}+1$

積化和差

(1) $\sin\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\ \sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\ \sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

和差化積

(2) $$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

接上頁

(註) $$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$$

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

接上頁

當 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 時

(1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

(2) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

(3) $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

(4) $\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=1$

(5) $\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta=1$

(6) $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$

三角形之性質

$\triangle ABC$中，A,B,C分別表$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$之度量，a,b,c分別表$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$之對邊長，又R,r,$\triangle$,s依次表外接圓半徑，內切圓半徑，三角形之面積，周長之一半。

1.正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{C}{\sin C}=2R$

2.餘弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

（註）$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

接上頁

3.投影定理

$$a=b\cos C+c\cos B\ ,\ b=c\cos A+a\cos C\ ,\ c=a\cos B+b\cos A$$

4.正切定理 $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

(註) 已知兩邊及夾角時，求其餘兩角，可利用正切定理。

接上頁

5.半角定理

(1) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ ， $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

$\sin\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

(2) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ ， $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ ， $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

(3) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ ， $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

6. $\triangle=\frac{1}{2}bc\ \sin A=\frac{1}{2}ca\ \sin B=\frac{1}{2}ab\ \sin C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=sr$

7. $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4\triangle}$

8. $r=\frac{\triangle}{s}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

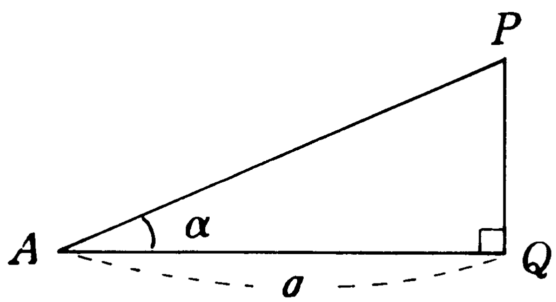
9. $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}$ 邊上之中線 $\overline{AM}$ 之長爲 m_a ，$\angle A$ 之平分線 $\overline{AD}$ 之長爲 t_a

，則 $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ ， $t_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

測量問題

1.設 A 爲觀測點，Q 爲基底，欲求 $\overline{PQ}$

(1)已知 $\overline{AQ}=a$，$\angle PAQ=\alpha$ 時 $\overline{PQ}=a\tan\alpha$

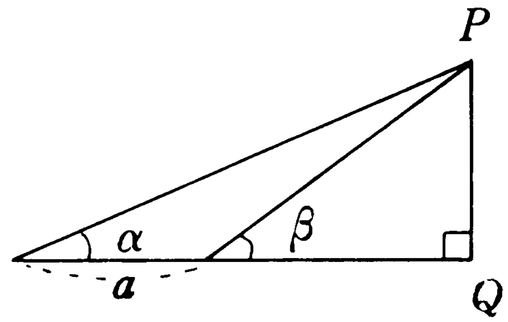


接上頁

1.設 A 爲觀測點，Q 爲基底，欲求 $\overline{PQ}$

(2)已知 $\overline{AB}=a$ ，$\angle PAQ=\alpha$ ，$\angle PBQ=\beta$ 時

$\triangle PAB$ 中 $\overline{PB}=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$



$\therefore \triangle PBQ$ 中 $\overline{PQ}=\overline{PB}\sin\beta=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$

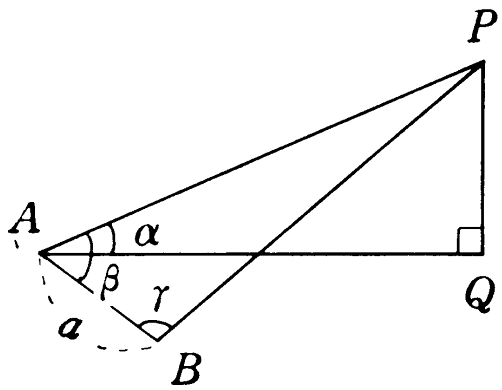
接上頁

1.設 A 為觀測點，Q 為基底，欲求 $\overline{PQ}$

(3)已知 $\overline{AB}=a$ ，$\angle PAQ=\alpha$ ，$\angle PAB=\beta$ ，$\angle PBA=\gamma$ 時

$\triangle PAB$ 中 $\overline{PA}=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$

$\therefore \triangle PAQ$ 中 $\overline{PQ}=\overline{PA}\ \sin\alpha=\dfrac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$

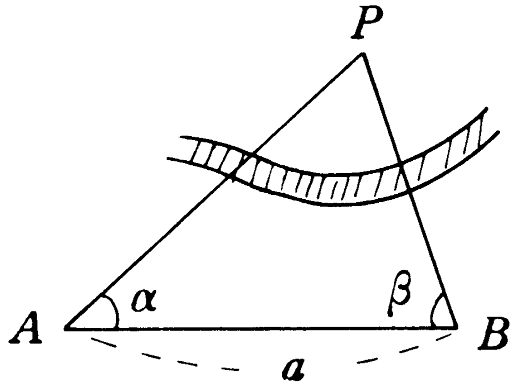


接上頁

2. 設 A 爲觀測點，欲求同一平面上之兩點距離。

(1)已知 $\overline{AB}=a$ ，$\angle PAB=\alpha$ ，$\angle PBA=\beta$ 時

$$\overline{AP}=\frac{a\ \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$



接上頁

2.設 A 為觀測點，欲求同一平面上之兩點距離。

(2)已知 $\overline{AP}=a$ ，$\overline{AQ}=b$ ，$\angle PAQ=\alpha$ 時

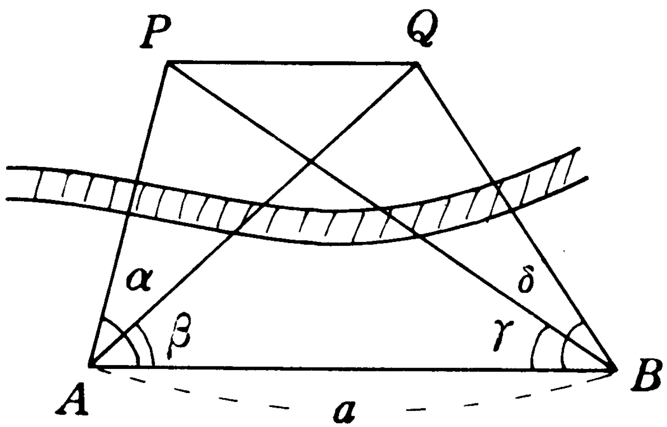
$$\overline{PQ}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$$

接上頁

2.設 A 為觀測點，欲求同一平面上之兩點距離。

(3) 已知 $\overline{AB}=a$ ，$\angle PAB=\alpha$ ，$\angle QAB=\beta$

$\angle PBA=\gamma$ ，$\angle QBA=\delta$ 時



$\triangle APB$ 中 $\overline{AP}=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$

$\triangle AQB$ 中 $\overline{AQ}=\dfrac{a\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$

代入（$\triangle APQ$ 中）

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-2\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cos(\alpha-\beta)}$$

三角方程式

1. 公式
$$\begin{cases} \sin x = a\ (\,|a| \leq 1\,) \text{之通解為 } x = n\pi + (-1)^n \alpha \\ \cos x = a\ (\,|a| \leq 1\,) \text{之通解為 } x = 2n\pi \pm \alpha \\ \tan x = a\ (\,a \in R\,) \text{之通解為 } x = n\pi + \alpha \end{cases}$$

其中 $n \in Z$ ，α 為各方程式之任一解（通常取主值）。

2. 解法 (1) 化為同名函數。 (2) 化為單角或同倍角。

(3) 化為正弦或餘弦函數。

(4) $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$

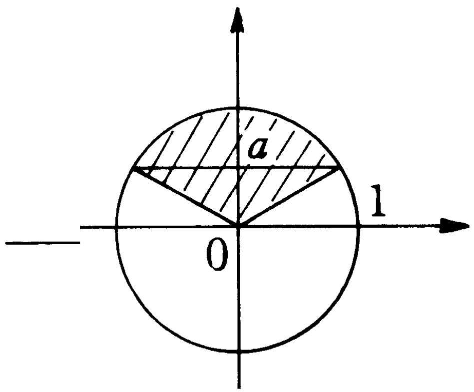
$= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \beta)$

(5) 和差與積之互化。 (6) 分解因式。

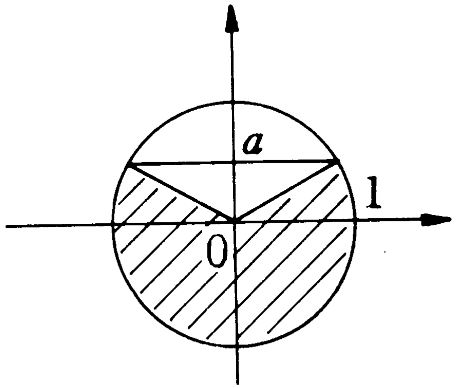
三角不等式

設 $|a|\leq 1$ ，則下列不等式中角 x 之終邊必在斜線部分。

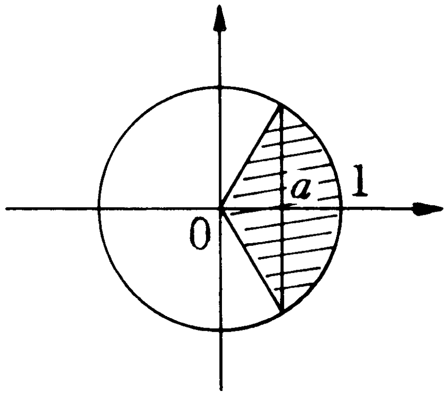
1. $\sin x > a$



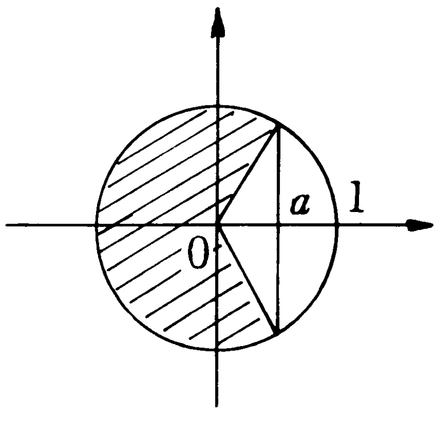
2. $\sin x < a$



3. $\cos x > a$



4. $\cos x < a$



三角函數之最大最小值

解法(1)化爲正弦或餘弦函數，再應用 $|\sin x|\leq 1$，$|\cos x|\leq 1$

(2)化爲同名之二次函數，再應用配方。

(3)將 $a\sin x+b\cos x$ 化爲 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

或 $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\beta)$

(4)將 $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x$ 化爲 $p\sin 2x+q\cos 2x+\gamma$

(5) $f(x)=a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x$ 中

設 $\sin x+\cos x=t$ $(|t|\leq\sqrt{2})$ 則 $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

將 $f(x)$ 化爲 t 之二次函數。

(6)應用半角公式：設 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ 則 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

直線方程式

1. 距離公式：$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$

$$\Rightarrow \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

接上頁

2. 分點公式：$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}}=\dfrac{m}{n}$

$$\Rightarrow P\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$、

(1)中點公式。　　　　(2)三角形重心公式

3.面積公式：$P_1(x_1, y_2)$， $P_2(x_2, y_2)$， $P_3(x_3, y_3)$

$$\Rightarrow \triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|$$

(1)共線公式。 (2)多邊形面積公式

接上頁

4.斜率公式：$L=\overleftrightarrow{P_1P_2}$，$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$　$x_1 \neq x_2$

規定L之斜率為$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$以m_L表之。

(1)平行判斷：

(2)垂直判斷：

接上頁

5. 直線方程式

(1)點斜式：$y-y_0=m(x-x_0)$ (2)斜截式：$y=mx+b$

(3)兩點式：$y-y_1=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$ $(x_1 \neq x_2)$

(4)截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(ab \neq 0)$

(5)一般式：$ax+by+c=0$ $(a^2+b^2 \neq 0)$

參數方程式

(1) $P_0(x_0, y_0)$，$\vec{v}=(a, b)$，L 過 P_0 與 $\vec{v}$ 平行

$$\Rightarrow \quad L: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in R$$

(2) $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，L 過 P_1，P_2

$$\Rightarrow \quad L: \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \quad t \in R$$

(3) $P_0(x_0, y_0)$，α 爲定角，L 過 P_0 且斜角爲 α

$$\Rightarrow \quad L: \begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases} \quad t \in R$$

(4) 設 $a, b, c, d \in R$，$b^2 + d^2 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \end{cases} \quad t \in R$$ 之圖形表一直線

直線關係

$L_i : a_i x + b_i y + c_i = 0$ ， $i = 1, 2, 3$

(1) $L_1 \cap L_2 = \{P_0\} \leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

(2) $L_1 \cap L_2 = \phi \leftrightarrow \exists X\ k$ 使 $a_1 = a_2 k$, $b_1 = b_2 k$, $c_1 \neq c_2 k$

(3) $L_1 = L_2 \leftrightarrow \exists$ 常數 k 使 $a_1 = a_2 k$, $b_1 = b_2 k$, $c_1 = c_2 k$

(4) L_1 , L_2 , L_3 相異且共點 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ ，其逆不真

直線系方程式

(1)過 (x_0, y_0) 之直線系方程式 ： $y-y_0=m(x-x_0)$ 或 $x=x_0$

(2)與 $ax+by+c=0$ 平行之直線系方程式： $ax+by+c'=0$ $(c \neq c')$

(3)與 $ax+by+c=0$ 垂直之直線系方程式： $bx-ay+c'=0$

(4)過 L_1，L_2 交點之直線系方程式：

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

$$\alpha, \beta \in R, \quad \alpha^2+\beta^2 \neq 0$$

$$(L_1: a_1x+b_1y+c_1=0, L_2: a_2x+b_2y+c_2=0)$$

點與線距離

$$P_0(x_0, y_0), \quad L: ax + by + c = 0$$

$$\Rightarrow d(P_0, L) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

交角平分線

L_i ：$a_i x + b_i y + c_i = 0$ ， $i = 1, 2$

L_1, L_2 交角平分線： $\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

交角公式

L_i ： $a_i x + b_i y + c_i = 0$ ，斜率為 m_i 　 $i = 1, 2$

(1) $\cos\theta = \pm \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ 　 (2) $\tan\theta = \pm \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$