向量

1.有向線段 $\overline{AB}$

(1) A ：始點 ，B ：終點 ，$|\overrightarrow{AB}|$ ：$\overrightarrow{AB}$ 之長

(2) $\overrightarrow{AA}$ ：零向量

(3) $|\overrightarrow{AB}|=1$ ，$\overrightarrow{AB}$ ：單位向量

(4) $\overrightarrow{BA}$：$\overrightarrow{AB}$ 之逆向量以 $-\overrightarrow{AB}$ 表之

2.自由向量

(1)只考慮方向與長度之向量，以 $\overrightarrow{a}$‧$\overrightarrow{b}$ … 表之

(2) $\overrightarrow{O}$ ：零向量

(3) $\overrightarrow{u}$ ：單位向量

(4) $-\overrightarrow{a}$ ：$\overrightarrow{a}$ 之逆向量

座標表示法

(1) $O(0,0)$, $A(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$

(2) $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{a}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

(3) $O(0,0,0)$, $A(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$

(4) $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{a}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$

向量加法

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ 規定 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(2)坐標表示

(i) $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2) \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$

(ii) $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

(3)性質

(i) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$

(ii) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$

(iii) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{o}=\overrightarrow{a}$

(iv) $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{o}$

(4)規定 $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$ 為 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

(5)$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$

純量積

(1) $\vec{a}$ ＝所予向量， r ：所予實數

(i) $\vec{a}=\vec{o}$ ，規定 $r\vec{a}=\vec{o}$

(ii) $\vec{a}\neq\vec{o}$

$$\begin{cases} r>o：規定\ r\vec{a}與\vec{a}同向且\ |r\vec{a}|=r\vec{a} \\ r=o：規定\ r\vec{a}=\vec{o} \\ r<o：規定\ r\vec{a}與\vec{a}反向且\ |r\vec{a}|=(-r)\vec{a} \end{cases}$$

(2)坐標表示

(i) $r \in R$, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2) \Rightarrow r\overrightarrow{a} = (ra_1, ra_2)$

(ii) $r \in R$, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow r\overrightarrow{a} = (ra_1, ra_2, ra_3)$

(3)性質

(i) $r(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = r\overrightarrow{a} + r\overrightarrow{b}$

(ii) $(r+s)\overrightarrow{a} = \overrightarrow{ra} + s\overrightarrow{a}$

(iii) $r(s\overrightarrow{a}) = (rs)\overrightarrow{a}$

分點公式

$$P \in \overline{P_1P_2} \quad , \quad \overline{P_1P} : \overline{PP_2} = m : n$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \left(\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{OP_1} + \left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{OP_2}$$

分角線公式

$\overline{AD}$ 爲$\triangle ABC$之分角線

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} = \left(\frac{b}{b+c}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c}\right)\overrightarrow{AC}$$

重心公式

$\triangle ABC$ 重心 G

(i) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

(ii) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

(iii) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{o} \Rightarrow O=G$

內心公式

$\triangle ABC$ 內心 I

(i) $\overrightarrow{AI}=(\dfrac{b}{a+b+c})\overrightarrow{AB}+(\dfrac{c}{a+b+c})\overrightarrow{AC}$

(ii) $\overrightarrow{OI}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$

共線公式

$A \neq B$

A, B, C 共線 $\leftrightarrow$ $\exists\ x, y \in R$, $x + y = 1$ 使 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$

向量內積

(1) $\vec{a}\neq\vec{o}$ ，$\vec{b}\neq\vec{o}$ ，$\vec{a}\cdot\vec{b}$之夾角θ ，$0\leqq\theta\leqq\pi$ 規定

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\theta$，$\vec{a}$，$\vec{b}$有一為$\vec{o}$ ，規定$\vec{a}\cdot\vec{b}=o$

(2)坐標表示

(i) $\vec{a}=(a_1, a_2)$ ， $\vec{b}=(b_1, b_2)\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

(ii) $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

(3)性質

(i) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

(ii) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(iii) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(iv) $r(\vec{a}\cdot\vec{b})=(r\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(r\vec{b})$

判斷垂直

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

(i) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in R^2$, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$

(ii) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in R^3$, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

夾角相關

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|}$$

(i) $\cos\theta = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ (ii) $\cos\theta = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

(3) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影長 $\left|\,|\overrightarrow{a}|\cos\theta\,\right| = \dfrac{|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}|}$

(4) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影 $\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}$

向量外積

(1) $\overrightarrow{a}=(a_1, a_2, a_3)$ ， $\overrightarrow{b}=(b_1, b_2, b_3)$

規定 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

(2)性質

(i) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a})$ (ii) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$ ， $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$

向量展成面積

(1) $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=\vec{a}\,,\vec{b}$ 張成平行四邊形的面積

(i) $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ $\Rightarrow |\vec{a}\wedge\vec{b}|=\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}\right\|$

(ii) $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\Rightarrow |\vec{a}\wedge\vec{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

向量展成體積

(2) $|\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{c}|=\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 張成平行六面體的體積

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{c}|=\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\|$$

共線共面

(1) $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$, $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b} \leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$

(2) $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$

$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 共面 $\leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

Ceva定理

於$\triangle ABC$，O表不在邊上一點，$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{CO}$各交邊$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$或其延長線於P，Q，R，則 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\cdot\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\cdot\dfrac{\overline{AR}}{\overline{RB}}=1$

Menelaus定理

一直線 L 交 $\triangle ABC$ 之邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 或其延長線於 P，Q，R，

則 $$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1$$

空間座標

1.距離公式：$P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\Rightarrow \quad \overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

2.分點公式：$P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{m}{n} \quad , \quad P_1-P-P_2$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}, \frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$$

(1)中點公式。　　(2)三角形重心公式。

面積公式

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\Rightarrow \triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}$$

體積公式

$P_i\,(x_i\,,\,y_i\,,z_i)\quad,\quad i=1\,,2\,,3\,,4$

$$\Rightarrow \quad \text{四面體}\ P_1P_2P_3P_4=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right\|$$

直線的方向向量

(1)向量 $\overrightarrow{u}$ ，直線 L ，$\overrightarrow{u}$ 平行 $L \Rightarrow \overrightarrow{u}$ ：L 之方向向量

(2) $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ， $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ， $P_1, P_2 \in L$

$\Rightarrow$ L 之方向向量 $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

平面的法向量

(1)向量$\overrightarrow{n}$，平面E ，$\overrightarrow{n}$垂直$E \Rightarrow \overrightarrow{n}$：$E$之法向量。

(2)$\overrightarrow{n}$為平面E之法向量，且 $|\overrightarrow{n}| = 1 \Rightarrow \overrightarrow{n}$：$E$之單位法向量

空間概念

(1)三垂線定理。

(2)球體積 $\frac{4}{3}\pi r^3$

(3)球表面積 $4\pi r^2$

(4)正射影面積 $s' = s\cos\theta$

(5)球心 O，球半徑 r，平面 E

(i) $d(O,E) < r \leftrightarrow$ E 與球交集為一圓

(ii) $d(O,E) = r \leftrightarrow$ E 為球之切面

(iii) $d(O,E) > r \leftrightarrow$ E 與球不相交

平面方程式

(1)點法式：平面 E 過 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且法向量 $\overrightarrow{n}=(a, b, c)$

$$\Rightarrow \quad E: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

(2)一般式：$a, b, c \in R$ ， $a^2+b^2+c^2 \neq 0$

$ax+by+cz+d=0$ 表一平面，法向量 (a, b, c)

(3)截距式：平面 E 交 x 軸於 $(a, 0, 0)$ ，y 軸於 $(0, b, 0)$ ，

z 軸 $(0, 0, c)$ $\quad \Rightarrow \quad E: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

接上頁

(4)三點式：平面 E 過 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，$P_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\Rightarrow \quad E: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

平面關係

$E_i: a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ ， $i = 1, 2$

(1) $E_1 = E_2 \leftrightarrow \exists$ 常數 k，使 $a_1 = a_2 k$, $b_1 = b_2 k$, $c_1 = c_2 k$, $d_1 = d_2 k$

(2) $E_1 /\!/ E_2$, $E_1 \neq E_2 \leftrightarrow$ $\exists$ 常數 k，使

$$a_1 = a_2 k \ , b_1 = b_2 k \ , c_1 = c_2 k \ , d_1 \neq d_2 k$$

(3) $E_1 \perp E_2 \leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

(4) E_1 , E_2 交角 $\theta \Rightarrow \cos\theta = \pm\left(\dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right)$

(5) $E_1 \cap E_2 = L$, $L: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$ ，則包含 L 之平面族方程

式： $\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0$ $\quad(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$

點與面之距離

(1) $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ， $E: ax+by+cz+d=0$

$$\Rightarrow \quad d(P_0, E)=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

(2) E_1, E_2 交角平分面方程式 （$E_i: a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$ ，$i=1,2$）

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

(3) $E_1: ax+by+cz+d_1=0$ ， $E_2: ax+by+cz+d_2=0$

$$\Rightarrow \quad d(E_1, E_2)=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

空間直線方程式

(1)兩點式

① $\overleftrightarrow{P_1P_2}$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ $(x_1 \neq x_2\ , y_1 \neq y_2\ , z_1 \neq z_2)$

② $\overleftrightarrow{P_1P_2}$: $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \\ z=z_1+(z_2-z_1)t \end{cases}$ $t \in R$

(2)點向式：L過$P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量(ℓ, m, n)

① $L: \dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ $(\ell m n \neq 0)$

② $L: \begin{cases} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+m t \\ z=z_0+n t \end{cases}$ $t \in R$

接上頁

(3)交集式：$L_1 = E_1 \cap E_2$，$(E_i: a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \quad, i = 1, 2)$

$$\Rightarrow \quad L: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

方向向量爲 $\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

直線關係

$$L_1 : \frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\ , L_2 : \frac{x-x_2}{\ell_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

(1) $L_1 /\!/ L_2 \leftrightarrow (\ell_1, m_1, n_1)=t(\ell_2, m_2, n_2)$, $\exists t\in R$

(2) $L_1 \perp L_2 \leftrightarrow \ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

(3) L_1 , L_2 交角 $\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\dfrac{\ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{\ell_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

(4) L_1 , L_2 公垂線 $L \Rightarrow L$ 之方向向量爲

$$\left(\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix} \right)$$

(5)歪斜線、相交線之判斷

球面方程式

(1)標準式

(i) $x^2+y^2+z^2=r^2$　　(ii) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

(2)一般式：$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ ，$D=a^2+b^2+c^2-4d$

(i) $D>0$：實球　　(ii) $D=0$：點球　　(iii) $D<0$：虛球

(3)直徑式：$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$

球之切面

(1) $P_0(x_0, y_0, z_0)$， $S: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ ， $P_0 \in S$

過 P_0 切 S 之平面方程式為

$$x_0x+y_0y+z_0z+a\left(\frac{x_0+x}{2}\right)+b\left(\frac{y_0+y}{2}\right)+c\left(\frac{z_0+z}{2}\right)+d=0$$

(2)已知切平面法向量 (a, b, c) ，設切面： $ax+by+cz+d=0$

球心 P_0 ，半徑 r ，利用 $d(P_0, E)=r$ ，求 d

平面投影及對稱

設平面 $E: f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$,點 $P_0(x_0, y_0, z_0)$

爲空間任一點，P_0 在 E 上之投影爲 M , P_0 對 E 之對稱點爲 P' ,則

(1) $$M = \left(x_0 - \frac{a \cdot f(x_0, y_0, z_0)}{a^2 + b^2 + c^2},\quad y_0 - \frac{b \cdot f(x_0, y_0, z_0)}{a^2 + b^2 + c^2},\right.$$

$$\left. z_0 - \frac{c \cdot f(x_0, y_0, z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

(2) $$P' = \left(x_0 - \frac{2a \cdot f(x_0, y_0, z_0)}{a^2 + b^2 + c^2},\quad y_0 - \frac{2b \cdot f(x_0, y_0, z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}\right.$$

$$\left. z_0 - \frac{2a \cdot f(x_0, y_0, z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

其中 $f(x_0, y_0, z_0) = ax_0 + by_0 + cy_0 + d$ 之値