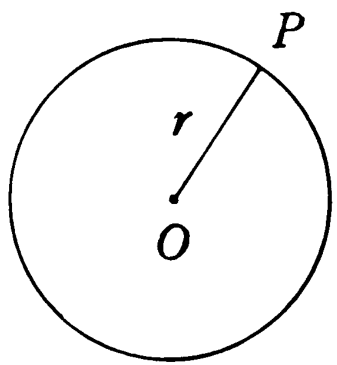
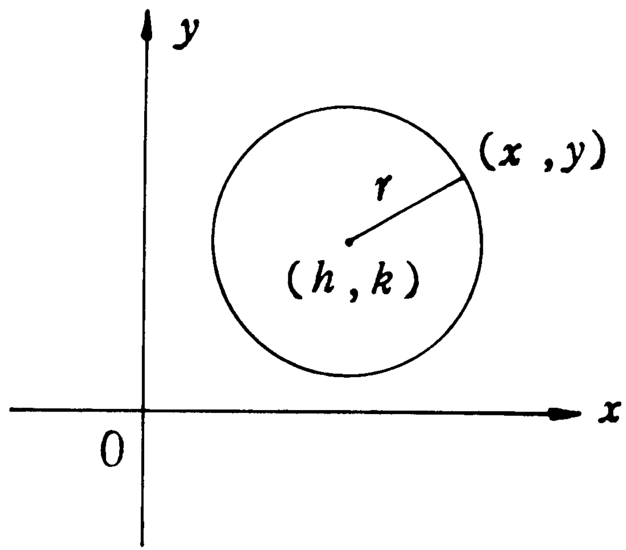
圓的定義

在一平面上，與一定點O有一定距離r（$r>0$）的所有點所成的圖形就是圓，定點O稱爲圓心，定數r稱爲半徑。



圓方程式



設以 (h,k) 點爲圓心，r 爲半徑長，

則圓方程式爲

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2} \cdots\cdots (A)$$

即 $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

注意：圓方程式之特徵　(1)缺 xy 項。

(2) x^2 與 y^2 兩項係數相等。

故圓的一般式：$x^2+y^2+dx+ey+f=0 \cdots\cdots\cdots (B)$

接上頁

方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 經配方後

方程式化為：$(x+\frac{d}{2})^2+(y+\frac{e}{2})^2=\frac{1}{4}(d^2+e^2-4f)$

(1)若 $d^2+e^2-4f>0$，則此方程式之圖形為一圓，

圓心 $(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2})$，半徑 $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$

(2)若 $d^2+e^2-4f=0$，則此方程式表一點，此點為 $(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2})$

（稱為點圓）

(3)若 $d^2+e^2-4f<0$，則此方程式表空集合，即無圖形（稱為虛圓）

圓的直徑式

設圓之直徑兩端點為$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，則圓方程式為

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

(即 $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+(x_1x_2+y_1y_2)=0$)

圓的參數式

設圓心爲 $C(h, k)$，半徑爲 r，$P(x, y)$ 爲圓上之點，則

$$\begin{cases} x = h + r\cos\theta \\ y = k + r\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in R) \quad (\theta \text{ 爲參數})$$

圓系

設圓 C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$ 直線 L：$ax+by+c=0$

圓 C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$

則(1)過圓 C_1 與直線 L 之交點之圓系方程式爲：$C_1+kL=0$（不包含 L）

(2)過圓 C_1 與圓 C_2 之交點之圓系方程式爲：

$C_1+kC_2=0$ （不包含 C_2）

或 $kC_1+C_2=0$ （不包含 C_1）

或 $k_1C_1+k_2C_2=0$ $k_1^2+k_2^2\neq 0$ （包含所有的兩圓）

圓的切線方程式

(1)過圓周上一點的切線

設$P(x_0, y_0)$為圓C上的一點，其切線方程式如下：

圓方程式	切線方程式
(1) $x^2+y^2=r^2$	$x_0x+y_0y=r^2$
(2) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$
(3) $x^2+y^2+dx+ey+f=0$	$x_0x+y_0y+d(\frac{x+x_0}{2})+e(\frac{y+y_0}{2})+f=0$

(2)已知切線斜率時的切線方程式

設已知圓C的切線斜率為m時，切線方程式如下：

圓方程式	切線斜率	切線方程式
(1) $x^2+y^2=r^2$	m	$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$
(2) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	m	$y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{1+m^2}$

圓的切線段長

定義：自圓外一點對圓所作的切線有二條，此點至切點之距離稱為圓的切線段長。

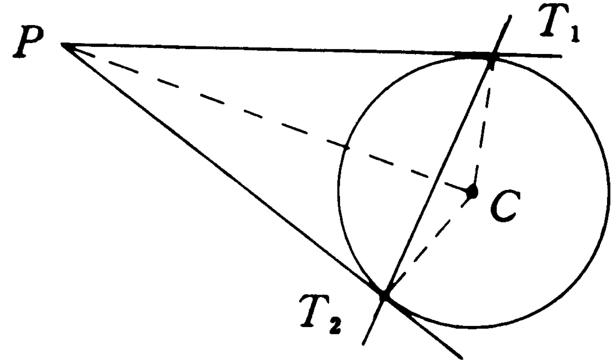
切線長公式：若 $P(x_0, y_0)$ 為圓 C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外一點，則 P 到圓所作的切線段長為 $t=\sqrt{x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f}$

【注意】：① $t>0$ 時 P 在圓外　② $t=0$ 時 P 在圓上

③ t 不為實數時 P 在圓內。

圓的切點弦

定義： 設P為一圓外一點，過P可作圓的二條切線，令T_1，T_2表其切點，則線段T_1T_2稱為切點弦，直線$\overleftrightarrow{T_1T_2}$稱為點$P$對此圓的一極線，而點$P$稱為極點。



圓的切點弦長

設 $P(x_0, y_0)$ 爲圓 C 外一點，自 P 作圓 C 之兩切線，令 T_1, T_2 爲切點，則 $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ 的方程式如下：

圓　方　程　式	極線（切點弦）的方程式
(1) $x^2+y^2=r^2$	$x_0x+y_0y=r^2$
(2) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$
(3) $x^2+y^2+dx+ey+f=0$	$x_0x+y_0y+d\left(\dfrac{x_0+x}{2}\right)+e\left(\dfrac{y_0+y}{2}\right)+f=0$

拋物線

1.焦點與準線

(1)設 L 是一定直線，F 是不在 L 上的一定點，則在包含 L 與 F 的平面上，至 F 與 L 等距離的所有點所成的圖形，稱爲**拋物線**。

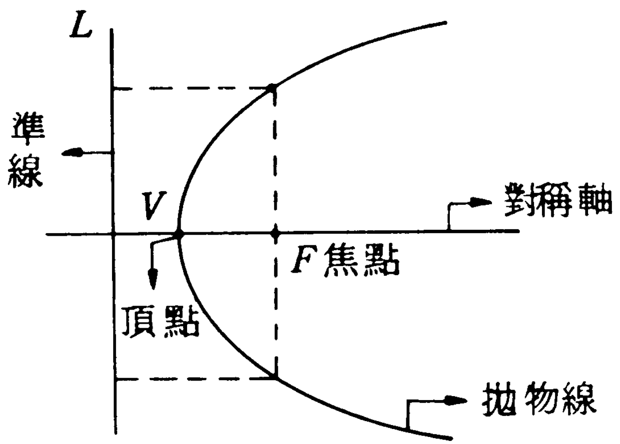
(2)拋物線之**焦點**，**準線**，**軸**，**頂點**：

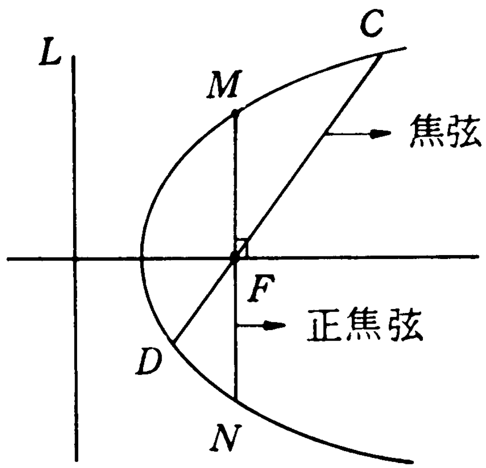
上述定義中，定直線 L 稱爲準線，定點 F 稱爲焦點，過 F 與 L 垂直的直線稱爲拋物線的對稱軸，簡稱爲軸。軸與拋物線的交點稱爲拋物線的頂點。

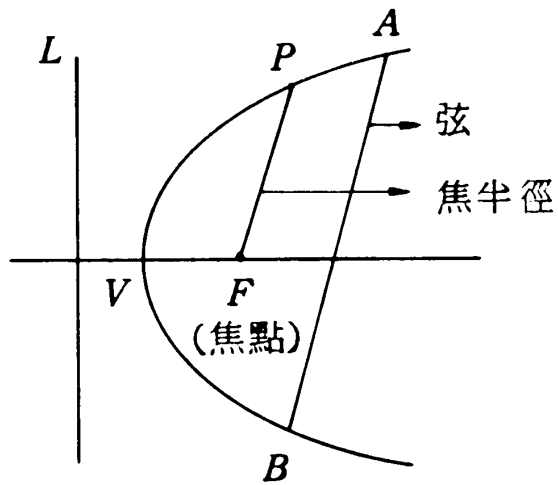
接上頁

(3)抛物線之**弦，焦弦，正焦弦，焦半徑：**

連接抛物線上任意兩點的線段，叫做抛物線的弦，圖中$\overline{AB}$爲弦；經過焦點的弦叫做焦弦。如圖中$\overline{CD}$；與對稱軸垂直的焦弦，叫做正焦弦，如$\overline{MN}$，連接抛物線上任意一點與焦點的線段，叫做抛物線的焦半徑，如圖中$\overline{PF}$。





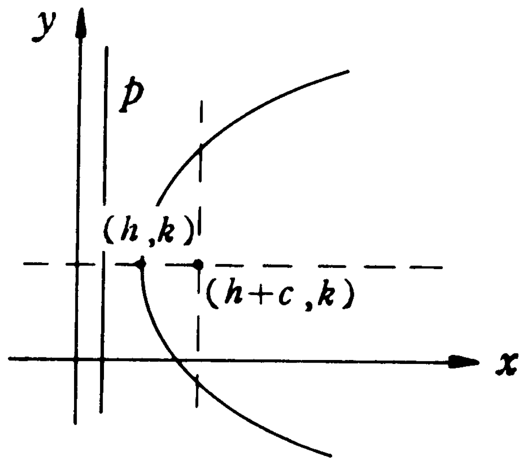


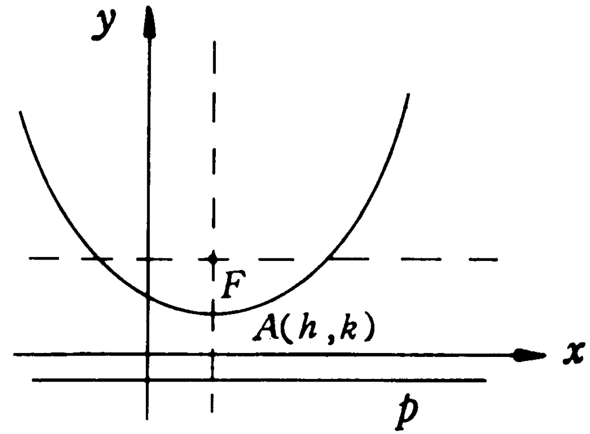
拋物線標準式

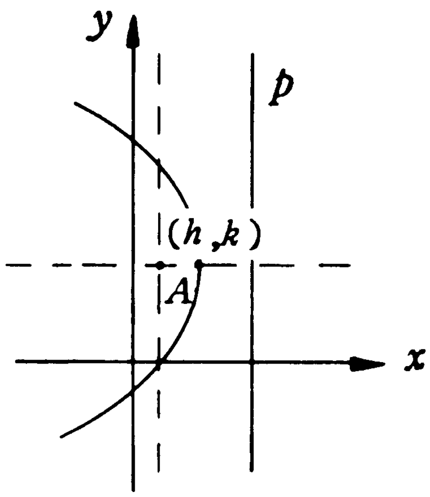
方程式	$(y-k)^2=4c(x-h)$	$(x-h)^2=4c(y-k)$
準　線	$x=-c+h$	$y=-c+k$
焦　點	$(c+h, k)$	$(h, c+k)$
頂　點	(h, k)	(h, k)
軸	$y=k$	$x=h$
正弦焦長	$\|4c\|$	$\|4c\|$

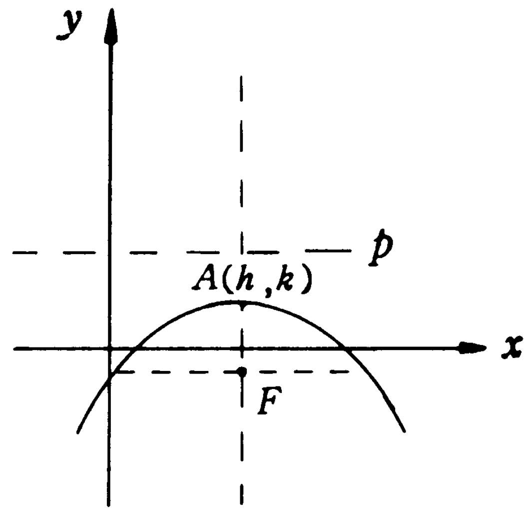
接上頁

<table>
<tr>
<td rowspan="2">圖　　形</td>
<td>$c>0$ 時


</td>
<td>$c>0$ 時


</td>
</tr>
<tr>
<td>$c<0$ 時


</td>
<td>$c<0$ 時


</td>
</tr>
</table>

二次函數圖形

二次函數$Y=f(x)=ax^2+bx+c$的圖形

設$f:x\to ax^2+bx+c$，($a,b,c\in R$，$x\in R$，$a\neq 0$)

則f之圖形表一拋物線。

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

其頂點為　$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

($a>0$時f有極小值$m=-\frac{b^2-4ac}{4a}$，

$a<0$時f有極大值$M=-\frac{b^2-4ac}{4a}$)

拋物線切線方程式

(1)設$P(x_0, y_0)$爲拋物線上之點，則以P爲切點之切線方程式爲：

	拋物線方程式	切線方程式
①	$(y-k)^2=4c(x-h)$	$(y_0-k)(y-k)=2c[(x_0-h)+(x-h)]$
②	$(x-h)^2=4c(y-k)$	$(x_0-h)(x-h)=2c[(y_0-k)+(y-k)]$

拋物線切點弦方程式

(2)設 $P(x_0, y_0)$ 不在拋物線上，自 P 作二切線，切點爲 T_1 及 T_2 則 $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ 的方程式如下：（$\overleftrightarrow{T_1T_2}$ 稱爲切點弦）

	拋物線方程式	切點弦方程式
①	$(y-k)^2=4c(x-h)$	$(y_0-k)(y-k)=2c[(x_0-h)+(x-h)]$
②	$(x-h)^2=4c(y-k)$	$(x_0-h)(x-h)=2c[(y_0-k)+(y-k)]$

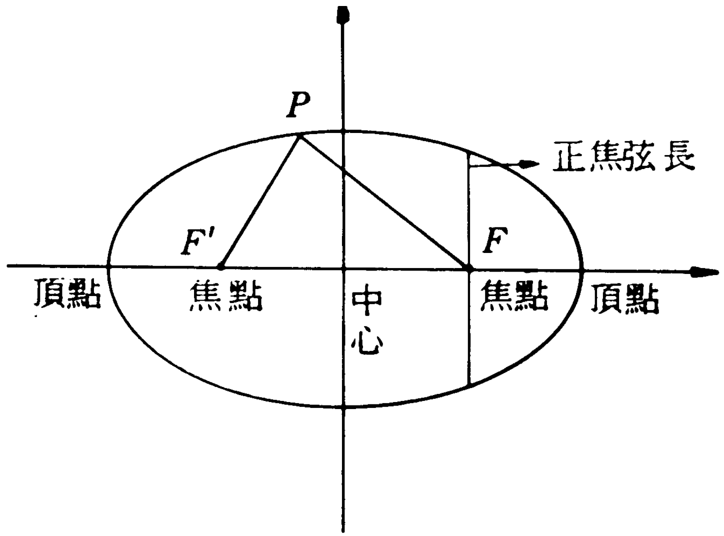
已知斜率的切線

(3)切線斜率爲m，則切線爲

拋物線方程式	斜率爲 m 之切線
$y^2=4cx$	$y=mx+\dfrac{c}{m}\quad(m\neq 0)$
$(y-k)^2=4c(x-h)$	$y-k=m(x-h)+\dfrac{c}{m}\quad(m\neq 0)$
$x^2=4cy$	$y=mx-cm^2$
$(x-h)^2=4c(y-k)$	$y-k=m(x-h)-cm^2$

橢圓定義

1.定義：一動點 P 與相異兩定點 F , F' 之距離和為 $2a$（$2a>\overline{FF'}$）時 P 之軌跡圖形為橢圓。



橢圓標準式

2.標準式（準線垂直或平行 x 軸）

標　　準　　式	中　心	焦　　點	正焦弦長	頂　　點	關　係　式
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	(h,k)	$(h\pm c,k)$	$\frac{2b^2}{a}$	$(h\pm a,k)$	$a^2=b^2+c^2$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$	(h,k)	$(h,k\pm c)$	$\frac{2a^2}{b}$	$(h,k\pm b)$	$b^2=a^2+c^2$

橢圓性質

(1) $P(x_0, y_0)$ 爲 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一點，若兩焦點 $F(c, 0)$，

$F'(-c, 0)$ 則 $\overline{PF}=\left|a-\dfrac{c}{a}x_0\right|$，$\overline{PF'}=\left|a+\dfrac{c}{a}x_0\right|$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之內接正方形面積爲 $\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$，周長爲 $\dfrac{8ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之內接矩形中，面積最大者，其面積 $=2ab$

此時其周長爲 $2\sqrt{2}\ (a+b)$

接上頁

(4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之內接矩形中周長最長者其周長爲 $=4\sqrt{a^2+b^2}$

此時其面積爲 $\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

(5) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 之參數式爲 $\begin{cases} x=h+a\cos\theta \\ y=k+b\sin\theta \end{cases}$

(6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ 所圍之面積 $=\pi ab$

(7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之切線斜率爲 m 之切線方程式爲 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

(8) $A(x_0, y_0)$ 在 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 上過 A 之切線方程式為

$$\frac{(x-h)(x_0-h)}{a^2}+\frac{(y-k)(y_0-k)}{b^2}=1$$

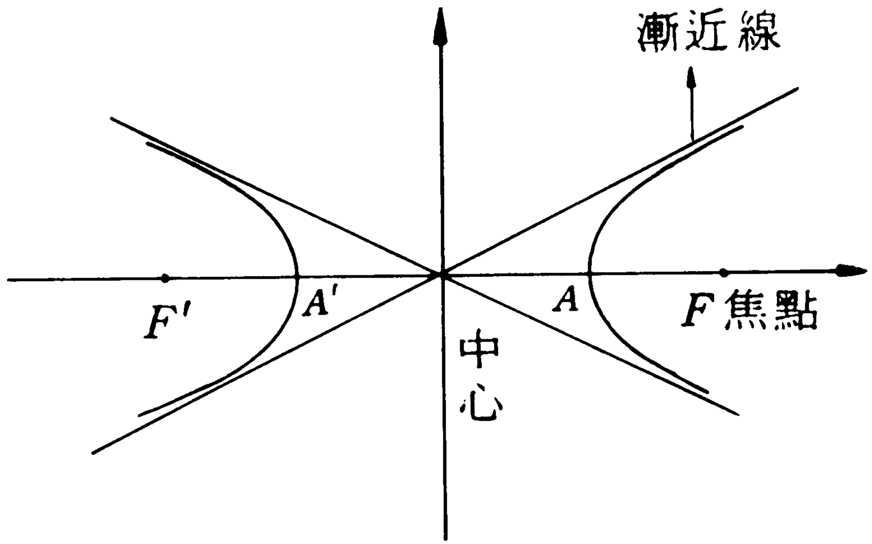
(9) $A(x_0, y_0)$ 在 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 之外過 A 作其切線，切

點為 P, Q，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 之方程式為 $\dfrac{(x-h)(x_0-h)}{a^2}+\dfrac{(y-k)(y_0-k)}{b^2}=1$

(10) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之互相垂直之切線之交點軌跡方程式為 $x^2+y^2=a^2+b^2$

雙曲線定義

1.定義：一動點P與相異兩定點F,F'之距離差為$2a$（$0<2a<FF'$）時P之軌跡圖形為雙曲線。



雙曲線標準式

2. 標準式

標準式	中心	頂點	焦點	正焦弦長	漸近線	關係式
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h\pm a,k)$	$(h\pm c,k)$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{x-h}{a}\pm\frac{(y-k)}{b}=0$	$c^2=a^2+b^2$
$\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$	(h,k)	$(h,k\pm b)$	$(h,k\pm c)$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{y-k}{b}\pm\frac{(x-h)}{a}=0$	$c^2=a^2+b^2$

雙曲線性質

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 爲等軸雙曲線，① $\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$ ②漸近線互相垂直

③ $S=2a$（ S 表正焦弦長）

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 與 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ 互爲共軛雙曲線

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一點 P 到其兩漸近線距離之積 $=\dfrac{a^2b^2}{c^2}$

(4)一直線 L，交雙曲線及其漸近線於 A，B 與 C，D 則 $\overline{AC}=\overline{BD}$

接上頁

(5)一直線 L 與雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切於 P，且交其漸近線於 A,B

則　① $\overline{AP}=\overline{BP}$　　② $\triangle AOB$ 之面積 $=ab$

(6) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之切線斜率爲 m 之切線方程式爲

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\quad\left(|m|>\frac{b}{a}\right)$$

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 之切線斜率爲 m 之切線方程式爲

$$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}\quad\left(|m|<\frac{b}{a}\right)$$

複數的定義

設 $a, b \in R$，則形如 $a+bi$ 的數稱爲複數（此處 $i=\sqrt{-1}$，即 $i^2=-1$，而 i 稱爲虛數單位）。複數之集合以 C 表示。而一個複數常以 z 表示。

標準式：一個複數 z 寫成 $z=a+bi$ （$a, b \in R$）之形式稱爲複數 z 之標準式，而 a 稱爲實部，b 稱爲虛部。

複數的運算

設 $a, b, c, d \in R$

①加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

②減法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

③乘法：$(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$

④除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

共軛複數的定義

設 $z = a + bi$ （$a, b \in R$），則 $a - bi$ 稱爲 z 之共軛複數，常以 $\overline{z}$ 表示。

即 $z = a + bi$　則 $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

$$\overline{(\overline{z})} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi$$

共軛複數的性質

性質(一)：① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$　　② $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$　　④ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_1}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$　（但 $z_2 \neq 0$ ）

性質(二)：① $z=\overline{z} \iff z\in R$

② $\overline{z}=-z \iff z$ 為純虛數或0

③ $z+\overline{z}\in R$ ，　$z\cdot\overline{z}\in R$

複數的絕對值

定義：設 $z=a+bi\ (a,b\in R)$，則 $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

性質：① $|z|=|\overline{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$

② $z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2=a^2+b^2$

③ $|z|=1 \iff z\cdot\overline{z}=1 \iff \overline{z}=\dfrac{1}{z}$

幾何意義：設 $z_1=a_1+b_1i$ ， $z_2=a_2+b_2i\ (a_1,a_2,b_1,b_2\in R)$

則 $|z_1-z_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$

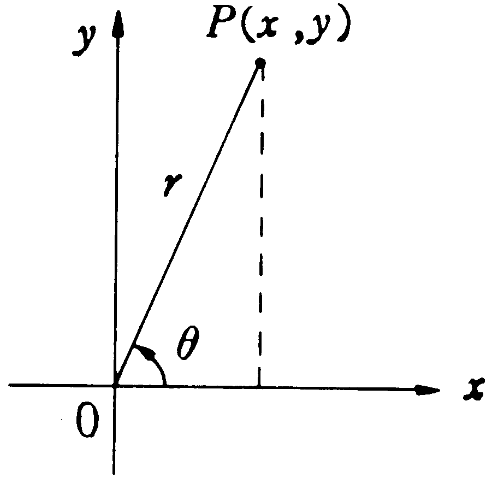
表 $P_1(a_1,b_1)$ 與 $P_2(a_2,b_2)$ 間之距離

複數極式表示法

設 x ,$y \in R$, $z = x + yi$ ，則以點 $P(x, y)$ 表複數 z ，以 θ 表 x 軸之正方向爲始邊，$\overline{OP}$ 爲終邊之角的度量，令 $r = |z| = \overline{OP}$ ，則

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \;,\; \sin\theta = \dfrac{y}{r} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{array}}$$

、



此時 z 可表爲 $z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = \boxed{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

r 稱爲複數 z 之"模"或"絕對值"，θ 稱爲複數 z 之輻角

複數極式之運算

設 $z_1=|z_1|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=|z_2|(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，

則① $z_1\cdot z_2=|z_1|\,|z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

② $\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{|z_2|}[\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)]$ $(z_2\neq 0)$

③ $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ $(z_2\neq 0)$

棣美弗定理

設 $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

則 $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ $\quad (n \in N)$

複數的n次方根

設 $\alpha = a + bi$ （ $a, b \in R$ ），其絕對值為 $|\alpha|$ ，主輻角為 ϕ

若 $x^n = \alpha$ ，則 $z_k = \sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos\frac{2k\pi+\phi}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\phi}{n}\right)$

（ $k = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$ ）為 α 之 n 個 n 次方根

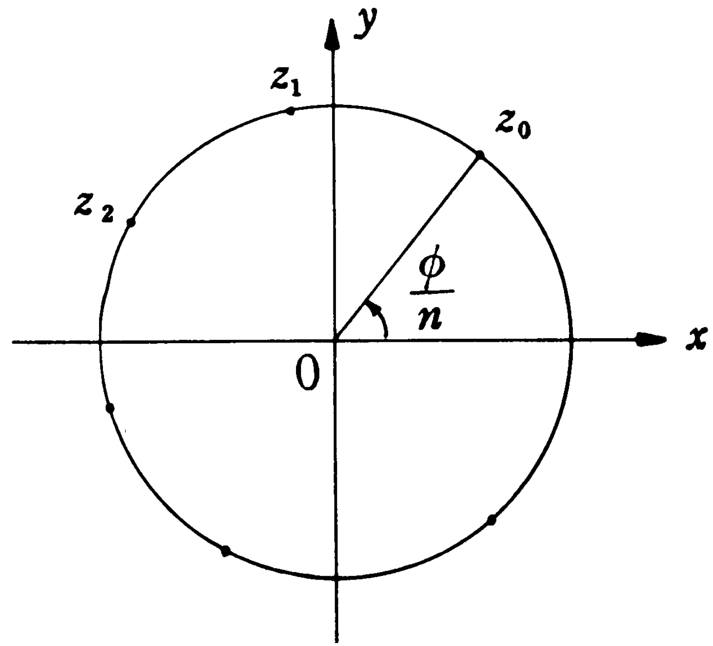
複數n次方根的幾何意義

α 之 n 個 n 次方根爲 $z_k=\sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos\dfrac{2k\pi+\phi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi+\phi}{n}\right)$

（但 $\phi=Arg\,\alpha$，$k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1$）其幾何意義爲

z_0，z_1，z_2，……，z_{n-1} 等 n 個相異點將圓心爲原點（0,0），半徑爲

$\sqrt[n]{|\alpha|}$ 之圓之圓周 n 等分。



複係數方程式

複數係數二次方程式之根

設 $ax^2+bx+c=0$

$(a, b, c \in C, a \neq 0)$

則 $x=\dfrac{-b\pm\alpha}{2a}$

（其中 α 為 b^2-4ac 之平方根）為其兩根

ω之性質及其應用

設 $n\in N$ ，$n\geqq 3$，若令 $w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\ \sin\dfrac{2\pi}{n}$ 則

①w 爲 $x^n=1$ 之一虛根，且 $\{1, w, w^2, \cdots\cdots, w^{n-1}\}$

爲 $x^n=1$ 之 n 個根

②$w^n=1$，及 $1+w+w^2+\cdots\cdots+w^{n-1}=0$

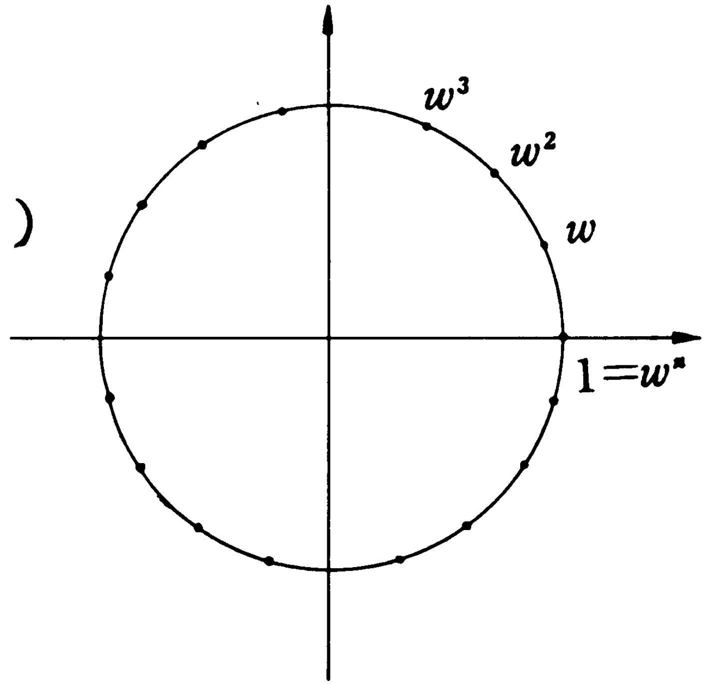
③ $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x^2+x+1$

$=(x-w)(x-w^2)(x-w^3)\cdots\cdots(x-w^{n-1})$

④ $\{1, w, w^2, \cdots\cdots, w^{n-1}\}$ 之幾何意義

爲各數所表之點將圓心在原點之

圓周 n 等分



⑤設 $x^n=\alpha$ ($\alpha=a+bi$, $a,b\in R$. $n\in N$)

若已知 α^* 爲方程式之一根

(即 $(\alpha^*)^n=\alpha$) ，則

$\{\alpha^*, \alpha^* w, \alpha^* w^2, \cdots\cdots, \alpha^* w^{n-1}\}$

爲此方程式之解集合

乘法原理

設完成某事件要經 n 個步驟，而作第 1 個步驟有 m_1 種方法作第 2 個步驟有 m_2 種方法……作第 n 個步驟有 m_n 種方法，則完成這件事的方法有 $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots\cdots m_n$ 種。

完全相異物的直線排列

由 n 個相異物選取 r 個（其中 $r \leq n$）按序排成一序列，則所有可能的方法數稱爲“ n 中取 r 的排列數”記作 P^n_r 或 ${}_nP_r$ 或 $P(n, r)$。

①$P^n_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \quad (n \geq r)$$

②$P^n_n = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

不完全相異物的直線排列

設有 n 件物品，共分 k 種不同種類，其中第一類有 m_1 件，第二類有 m_2 件……，第 k 類有 m_k 件，且 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k=n$，則將此 n 件物品排成一列共有 $\dfrac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots\cdots m_k!}$ 種不同排法，以

$$\binom{n}{m_1,\ m_2,\ \cdots\cdots m_k}$$

表之。

$$\text{即}\binom{n}{m_1,m_2,\cdots\cdots m_k}=\frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots\cdots m_k!}$$

完全相異物的環狀排列

(1) n 件相異物的環狀排列有 $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

(2)自 n 件相異物中，每次取 m 個作環狀排列（其中 $m\leq n$），則環狀排列數為 $\dfrac{P_m^n}{m}=\dfrac{n!}{m\cdot(n-m)!}$

珠狀排列

(3)珠狀排列（可翻轉）：

①由 n 個相異之珠子串成一項圈（可翻轉），則其排列(珠狀排列)數為 $\dfrac{(n-1)!}{2}$

②自 n 個相異之珠子，每次取m個作項圈（可翻轉），則其排列（珠狀排列）數為 $\dfrac{P_m^n}{2m}$（珠狀排列數＝$\dfrac{\text{環狀排列數}}{2}$）

③ n 顆不完全相異的珠子串成項圈，則分成對稱與非對稱之形式討論得珠狀排列數＝對稱的環狀排列數＋$\dfrac{1}{2}$（非對稱的環狀排列數）。

接上頁

(4)正 k 邊形之排列數：n 個人圍一正 k 邊形之桌子而坐，每邊人數相同，則其排列數有 $\frac{n!}{k}$。

(5)長方桌之排列數：n 個人圍一長方桌而坐，兩長邊及兩短邊之人數均分別相同，則其排列數有 $\frac{n!}{2}$。

組合

1.自 n 件相異物中（不許重複），每次取 r 個爲一組的組合數爲

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

2.自 n 件相異物中，准許重複，每次取 r 個爲一組的組合數爲

$$H_r^n = C_r^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

3.巴斯卡定理：$C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}$

排容原理

設A_1，A_2，A_3，……，A_n為n個集合

則
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n)$$

分堆分組問題

將 n 個相異物分成含有 m_1，m_2，……，m_k 物品之 k 個組

設 $\ell = C^{n}_{m_1} C^{n-m_1}_{m_2} \cdots\cdots C^{n-m_1-m_2-\cdots\cdots-m_{k-1}}_{m_k}$，則

在 k 個組中

(1)若 m_1，m_2，……，m_k 兩兩相異，則

①分成 k 個組有 ℓ 種方法。

②若分成 k 個組後給 k 個人有 $\ell \cdot k!$ 種方法。

接上頁

將 n 個相異物分成含有 m_1，m_2，……，m_k 物品之 k 個組

設 $\ell = C^{n}_{m_1} C^{n-m_1}_{m_2} \cdots\cdots C^{n-m_1-m_2-\cdots\cdots-m_{k-1}}_{m_k}$ ，則

在 k 個組中

(2)若 m_1，m_2，……，m_k 中 r_1 組個數相同，另 r_2 組個數相同，…，另 r_i 組個數相同，其餘各組個數均不相同且 $r_1+r_2+\cdots+r_i\leq k$，

則①分成 k 個組有 $\dfrac{\ell}{r_1!\,r_2!\cdots\cdots r_i!}$ 種方法。

②若分成 k 個組後給 k 個人，則有 $\dfrac{\ell}{r_1!\,r_2!\cdots\cdots r_i!}\cdot k!$ 種方法。

二項式定理

1.二項式定理：

$$(x+y)^n=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+C_2^n x^{n-2}y^2+\cdots\cdots+C_k^n x^{n-k}y^k+\cdots+C_n^n y^n$$

2.多項式定理：

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)^m=\sum_{\substack{p_1+p_2+\cdots+p_n=m\\0\leq p_1,p_2,\cdots p_n\leq m}}\binom{m}{p_1,p_2,\cdots,p_n}\cdot$$

$$x_1^{p_1}\cdot x_1^{p_2}\cdot\cdots\cdots x_n^{p_n}$$

其中 $\binom{m}{p_1,p_2,\cdots,p_n}=\dfrac{m!}{p_1!\,p_2!\cdots p_n!}$

組合公式

① $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

即 $\sum_{k=0}^{n} C_k^n = 2^n$ ， $\sum_{k=1}^{n} C_k = 2^n - 1$

② $C_0^n + C_2^n + \cdots\cdots = C_1^n + C_3^n + \cdots\cdots = 2^{n-1}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_k^n = n \cdot 2^{n-1}$

④ $\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot C_k^n = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

⑤ $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_k^n = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$

⑥ $\sum_{k=0}^{n} (C_k^n)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_n^{2n}$

機率

1. 基本觀念：機率 $= \dfrac{\text{事件之元素的個數}}{\text{樣本空間之元素的個數}}$

性質：(1)設 $\overline{A}$ 表 A 的餘事件，則 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

(2) $P(\phi)=0$ ，$P(S)=1$ ，S 表樣本空間。

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。若 A 與 B 互斥，

則 $P(A\cap B)=0$，此時 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

(4) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$

$-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

(5) $\because A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$，且 $A\cap B$ 與 $A\cap\overline{B}$ 為互斥事件，

$\therefore P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$

幾何機率

2. 幾何機率：設隨機試驗的樣本空間 S 爲一幾何圖形，則事件 A 發生之機率爲 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(S)}$。其中 m（•）表 • 的幾何度量（在一度空間中指長度，在二度空間中指面積）。

條件機率

A, B 爲樣本空間 S 中的二事件，則在事件 A 發生的條件下

，事件 B 發生的機率爲 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 。

性質：(1) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$ 。

(2) $k\in N$ ，$k\geq 2$ ，A_1，A_2，……，A_k 均爲非零事件，且

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_k\neq\phi$ ，則 $P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_k)$

$=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots\cdots$

$P(A_k|A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_{k-1})$ 。

(3) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

(4)設$\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_r\}$為樣本空間$S$的一個分割，$B$為任一事件，則$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots\cdots+P(A_r)P(B|A_r)$。

(5)貝氏定理：設$\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_r\}$為樣本空間$S$的一個分割，$B$為任一非零事件，則對每一個自然數$k$，$1 \leq k \leq r$，

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{r} P(A_j)P(B|A_j)}$$

獨立事件

(1) A，B 表同一樣本空間的二事件，若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，則稱 A，B 爲二獨立事件。

【註】兩獨立事件不見得互斥，兩互斥事件也不見得獨立，所謂互斥事件是不可能同時發生，而獨立事件是一事件的發生與否與另一事件是否發生無關。

(2) A，B，C 爲三事件，則 A，B，C 爲獨立事件 $\Longleftrightarrow$

① A，B，C 兩兩獨立。 ② $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

重複試驗

(3)重複試驗的機率：設某事件試行一次成功的機率爲 p（即失敗的機率爲 $1-p$），則於 n 次試驗中。

①恰有 r 次成功的機率爲 $C_r^n p^r(1-p)^{n-r}$。

②至少有 r 次成功的機率爲

$$C_r^n p^r(1-p)^{n-r}+C_{r+1}^n p^{r+1}(1-p)^{n-r-1}+\cdots+C_n^n p^n$$

期望值

3.(1)設某事件成功的機率爲 p ，若該事件成功即可得 m 元，則 pm 元稱爲此事件的數學期望值，簡稱爲期望值。

(2)事件 A_1 , A_2 , $\cdots$ A_k 發生的機率依序爲 p_1 ， p_2 , $\cdots\cdots$ p_k

事件 A_1 , A_2 , $\cdots$ A_k 發生時，依序可得 m_1 , m_2 , $\cdots\cdots$ m_k 元

則此試驗的期望值爲 $p_1m_1+p_2m_2+\cdots\cdots+p_km_k$ 元。

敘述統計

算數平均數

(1)算術平均數M

a．未分組資料：$M=\overline{X}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

b．已分組資料：$M=\overline{X}=\dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

其中 x_i 表第 i 組之組中點，f_i 表第 i 組之次數。

c．利用平移且縮小變量：$M=A+\frac{h}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i d_i$ ，$d_i=\dfrac{x_i-A}{h}$

其中 x_i 表第 i 組之組中點，f_i 表第 i 組之次數，h 為組距，A為假定平均數。

加權平均數

(2)加權平均數W

$$W=\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$ 其中 w_i 爲 x_i 之權數。

中位數

(3)中位數，Me

a. 未分組資料

先將全部資料依大小順序排列得 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$

①若 $n=2k+1$ 則 $Me=x_{(\frac{n+1}{2})}$

②若 $n=2k$ 則 $Me=\frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})}+x_{(\frac{n}{2}+1)}\right)$

接上頁

b. 已分組資料

先判別出中位數落在第 i 組，再利用

$$Me = L_i + \frac{\frac{n}{2} - c_{i-1}}{f_i} \quad (U_i - L_i)$$

或 $$Me = U_i - \frac{c_i - \frac{n}{2}}{f_i} \quad (U_i - L_i)$$

其中 L_i, U_i 表第 i 組之下限與上限，f_i 表第 i 組之次數，

c_{i-1} 表第 $i-1$ 組以下累積次數。

離差

全距

(1)全距 R

a. 未分組資料

先將資料依大小順序排列得 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$

則 $R = x_{(n)} - x_{(1)}$

b. 已分組資料

$R =$（最大組之上限）－（最小組之下限）

四分位差Q.D.

(2)四分位差$Q.D.$

a. 未分組資料：

將全部資料依大小順序排列，求得第1四分位數Q_1及第3四分位數Q_3則 $Q.D.=\frac{1}{2}(Q_3-Q_1)$

b. 已分組資料：

利用 $Q_i=L_{Q_i}+\dfrac{\frac{in}{4}-C_{Q_i}}{f_{Q_i}}\cdot h_{Q_i}$　求得Q_1及Q_3

其中L_{Q_i}表Q_i所在組之下限，C_{Q_i}表較L_{Q_i}小之各組的累加次數，f_{Q_i}表Q_i所在組之次數。h_{Q_i}表Q_i所在組之組距。

標準差S

(3)標準差 S

a. 未分組資料

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{X}^2}$$

b。已分組資料

$$S=h\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_i d_i^2-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_i d_i)^2}$$

其中　$d_i=\dfrac{x_i-A}{h}$　（A為假定平均，h為組距）

混和平均數與標準差

3.混合平均數與標準差：

設有兩群資料 A, B ，若 A 群資料有 n_1 個算術平均數與標準差分別爲 $\overline{X}_1$ ，S_1 ，B 群資料有 n_2 個，算術平均數與標準差分別爲 $\overline{X}_2$ ，S_2 ，則兩群資料混合後，所得之算術平均數與標準差分別爲

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2}$$

$$S = \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 n_2 (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}}$$

變異係數CV

$CV = \frac{S}{\overline{X}} \times 100\%$，其中 S 爲標準差，$\overline{X}$ 爲算術平均數。

相關係數r

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{nS_xS_y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2}}$$

$$=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}y_i)}{\sqrt{[n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2][n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2]}}$$

註：$-1\leq r\leq 1$：

(1) $r=+1$（完全正相關）　(2) $r=-1$（完全負相關）

(3) $0.7\leq|r|\leq 1$（高度相關）　(4) $0.3\leq|r|<0.7$（中度相關）

(5) $0<|r|<0.3$（低度相關）　(6) $r=0$（零相關）