深入探討

直線排列行列式

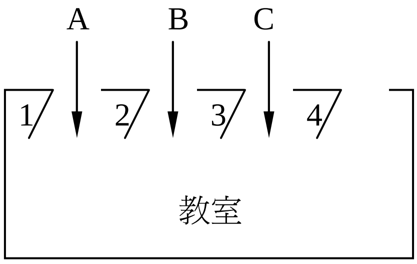
作者：王志傑

民國 92 年 5 月時，我正在建國中學實習，在 91 年度下學期第二次月考二年級的數學試題中，有這麼十分值得深入玩味的一題！

【問題一】一教室有 4 個不同的門，A、B、C 由不同的門進入再由不同的門出來，若每人均不可由相同的門進出，則進出的方法共有_______種？

【解法一（正面作法）】

第一階段，考慮 A、B、C 依序進入，則共有$4\cdot 3\cdot 2=24$種方法。不失一般性，假設 A、B、C 分別從 1、2、3 號門進入。

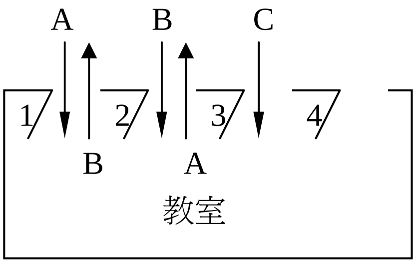


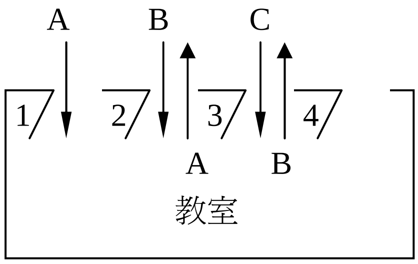
第二階段，考慮 A、B、C 依序出來，

(1) 若 A 從 2 號門出來，

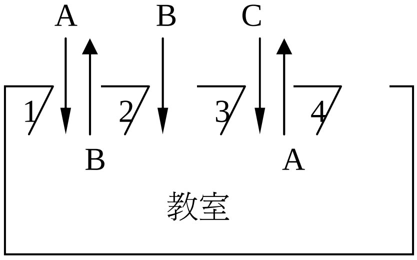
B 從 1(或 4)號門出來，則 C 只能從 4(或 1)號門出來，共有$1\cdot 2\cdot 1=2$種方法。

B 從 3 號門出來，則 C 能從 1 或 4 號門出來，共有$1\cdot 1\cdot 2=2$種方法。





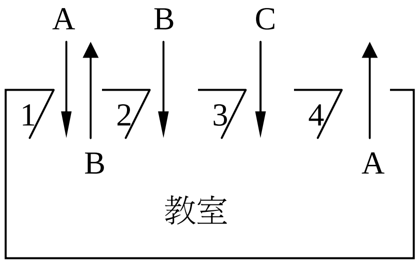
(2) 若 A 從 3 號門出來，B 可從 1 或 4 號門出來，而 C 都還有 2 個門可以出來，共有$1\cdot 2\cdot 2=4$種方法。

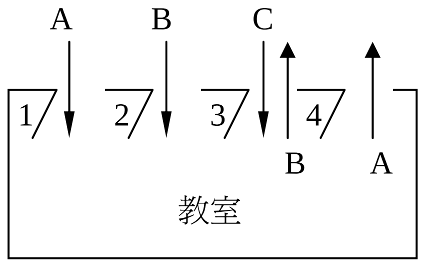


(3) 若 A 從 4 號門出來，

B 從 1 號門出來，則 C 只能從 2 號門出來，共有$1\cdot1\cdot1=1$種方法。

B 從 3 號門出來，則 C 能從 1 或 2 號門出來，共有$1\cdot1\cdot2=2$種方法。





由(1)(2)(3)知，A、B、C 出來共有$2+2+4+1+2=11$種方法，故 A、B、C 進去再出來共有$24\cdot11=264$種方法。 ■

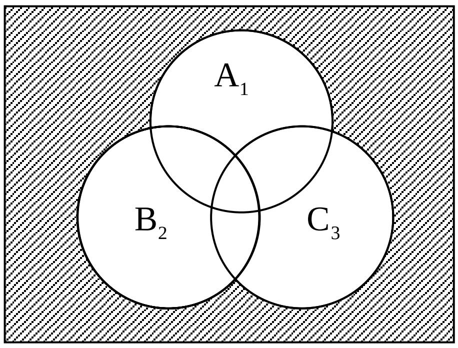
【解法二（反面作法）】

第一階段，考慮 A、B、C 依序進入，則共有$4\cdot3\cdot2=24$種方法。不失一般性，假設 A、B、C 分別從 1、2、3 號門進入。

第二階段，考慮 A、B、C 依序出來，此時 A、B、C 分別不能從第 1、2、3 號門出來。若我們以A_1、B_2、C_3分別代表 A、B、C 從第 1、2、3 號門出來的事件，則A_1'、B_2'、C_3'分別代表 A、B、C 不能從第 1、2、3 號門出來的事件，

則 $$\begin{aligned}n(A_1'\cap B_2'\cap C_3')&=n((A_1\cup B_2\cup C_3)')=n(U)-n(A_1\cup B_2\cup C_3)\\&=n(U)-3\cdot n(A_1)+3\cdot n(A_1\cap B_2)-n(A_1\cap B_2\cap C_3)\\&=P^4_3-3\cdot P^3_2+3\cdot P^2_1-P^1_0=4\cdot3\cdot2-3\cdot3\cdot2+3\cdot2-1=11\end{aligned}$$

故 A、B、C 進去再出來共有$24\cdot11=264$種方法。 ■



二、介紹「直線排列行列式」：在第一段中我們提出一般人常用的作法，現在我們引入另一種未曾在高中教科書出現的方法，這種方法的表達法與行列式有些相似，但算法卻完全不一樣，以下我們先給出定義。

【定義】所謂「直線排列行列式」指的是一個$n\times n$的方陣，表示為

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$，$a_{ij} \in \{0,1\}$，而$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$展開後之值

爲$\sum a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}$，其中$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$是$(1,2,\cdots,n)$的一個重排（permutation）。

【注意一】我們應該可以從定義中明顯看出一般的行列式和「直線排列行列式」的不同，一般行列式的值拆開後常常會有正負相間的情形，但「直線排列行列式」的算法卻只是把《所有非 0 項全部加起來》。

光這樣講或許大家還是對「直線排列行列式」不甚瞭解，以下我們先舉一個例子。

【例題】若 A、B、C 三人從一教室內走出來，此教室共有 3 個門，問 A、B、C 共有多少種出來的方法？

【解法】其實這只是一個非常基本的直線排列問題，我們現在特地用「直線排列行列式」來詳細解之。若我們以$A_i B_j C_k$代表 A、B、C 分別從第 i、j、k 號門出來。

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \underset{A_1\ B_2\ C_3}{1\cdot 1\cdot 1} + \underset{A_2\ B_3\ C_1}{1\cdot 1\cdot 1} + \underset{A_3\ B_1\ C_2}{1\cdot 1\cdot 1}$$

$$+ \underset{A_1\ B_3\ C_2}{1\cdot 1\cdot 1} + \underset{A_2\ B_1\ C_3}{1\cdot 1\cdot 1} + \underset{A_3\ B_2\ C_1}{1\cdot 1\cdot 1} = 6 \qquad \blacksquare$$

接下來我們列出一些「直線排列行列式」的性質，希望大家對「直線排列行列式」能更有感覺。

【性質一】若對所有的$i, j = 1,2,\cdots,n$，$a_{ij} = 1$，則$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = n!$。

【性質二】在「直線排列行列式」中，若兩行（或是兩列）互換，則其值不變。

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

（第 1、第 3 行互換）　　（第 1、第 3 列互換）

【性質三】「直線排列行列式」可以像一般行列式那樣子沿著某一行（或是某一列）降階，但降階後的各項皆以「+」號連接，而非正負相間。（因爲我們只在乎有幾項不爲 0）例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

【性質四】與一般的行列式類似，對某一行（或列）而言具有可加性，例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【性質五】若一個 $n \times n$ 的「直線排列行列式」中，只有一個元素爲 0，其餘元素皆爲 1，由【性質二】必可將那個 0『調到』左上角去，再由【性質四】，

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n! - (n-1)!$$

當初使用「直線排列行列式」這種算法，最主要是用來計算有『較多限制』的直線排列型問題，因爲若我們用排冗員李來考慮可能較爲複雜。例如：

【問題二】ABCD 四人排成一列，其中 A 不排第 1、第 2 位，B 不排第 1、第 3 位，C 不排第 3 位，D 不排第 3、4 位，問共有多少種排法？

【解法】我們用「直線排列行列式」來做這一題。我們以第 1、2、3、4 列分別代表 A、B、C、D 的坐法，第 1、2、3、4 行則分別代表第 1、2、3、4 個位置。在「直線排列行列式」中，若某人不可以排某個位置則填 0，可以排則填 1。例如 A 不可排第 2 位，則第 1 列第 2 行填 0；而 B 可以排第 4 位，則第 2 列第 4 行填 1。那麼如題目所言的限制，我們將可以得到一個「直線排列行列式」如下：

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \end{array},$$

計算此「直線排列行列式」，

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| = 1\cdot\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right| + 1\cdot\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 2+1=3，$$

因此在這一題的諸多限制下，A、B、C、D 只有 3 種排成一列的方法。 ■

接著我們來做一題高中數學中十分經典的『錯排』問題

【問題三】ABCDE 五人排成一列，其中 A 不排第 1 位，B 不排第 2 位，C 不排第 3 位，D 不排第 4 位，E 不排第 5 位，問共有多少種排法？

【解法一（反面作法）】

若我們以 A_1、B_2、C_3、D_4、E_5 分別代表 A、B、C、D、E 排在第 1、2、3、4、5 號位置的事件，則 A_1'、B_2'、C_3'、D_4'、E_5' 分別代表 A、B、C、D、E 不能從第 1、2、3、4、5 號位置的事件，則

$$\begin{aligned}
&n(A_1'\cap B_2'\cap C_3'\cap D_4'\cap E_5') \\
&= n((A_1\cup B_2\cup C_3\cup D_4\cup E_5)') \\
&= n(U)-n(A_1\cup B_2\cup C_3\cup D_4\cup E_5) \\
&= n(U)-C_1^5\cdot n(A_1)+C_2^5\cdot n(A_1\cap B_2)-C_3^5\cdot n(A_1\cap B_2\cap C_3)+C_4^5\cdot n(A_1\cap B_2\cap C_3\cap D_4) \\
&\quad -C_5^5\cdot n(A_1\cap B_2\cap C_3\cap D_4\cap E_5) \\
&= \sum_{k=0}^{5}(-1)^k C_k^5\cdot(5-k)! \\
&= 5!-5\cdot 4!+10\cdot 3!-10\cdot 2!+5\cdot 1!-1\cdot 0!
\end{aligned}$$

$= 44$ ■

【解法二（「直線排列行列式」法）】

由題意，我們可以寫出一個「直線排列行列式」來計算此『錯排』問題，如下

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

，利用【性質三】降階則可得到相同的答案，在此不贅述。

■

由【問題三】的兩個解法中，我們又可以得到關於「直線排列行列式」的新性質。

【性質六】若一個 $n \times n$ 的「直線排列行列式」中，只有對角線的 n 個元素為 0，其餘元素皆為 1，則

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n (n-k)!$$

【性質七】將【性質六】推廣，如果在對角線的 n 個元素中，只有 m 個是 0，$m \le n$，對角線其餘$(n-m)$個元素皆是 1，且除了對角線外的所有其他元素也是 1，則

$$\begin{vmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 1} & \\ & & 0 & & & \\ & \text{\Large 1} & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_k^m P_{m-k}^{n-k}$$

現在我們就利用「直線排列行列式」再來練習做一次【問題一】。

【解法三（「直線排列行列式」法）】

第一階段，考慮 A、B、C 依序進入，則共有$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$種方法。不失一般性，假設 A、B、C 分別從 1、2、3 號門進入。

第二階段，考慮 A、B、C 依序出來，此時 A、B、C 分別不能從第 1、2、3 號門出來。為了補足 4 個人，我們特地加一個隱形人 D 尾隨 A、B、C 出來，而

D 出來是沒有限制的，則我們可以寫一個「直線排列行列式」來計算此題：

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
A & 0 & 1 & 1 & 1 \\
B & 1 & 0 & 1 & 1 \\
C & 1 & 1 & 0 & 1 \\
D & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3!-2!+3!-2!+3 = 11$$

故 A、B、C 進去再出來共有 $24\cdot 11 = 264$ 種方法。 ■

【問題五】一教室有 5 個不同的門，A、B、C 由不同的門進入再由不同的門出來，若每人均不可由相同的門進出，則進出的方法共有________種？

【解法】

第一階段，考慮 A、B、C 依序進入，則共有 $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ 種方法。不失一般性，假設 A、B、C 分別從 1、2、3 號門進入。

第二階段，考慮 A、B、C 依序出來，此時 A、B、C 分別不能從第 1、2、3 號門出來。爲了補足 5 個人，我們特地加兩個隱形人 D、D' 尾隨 A、B、C 出來，而 D、D' 出來是沒有限制的，則我們可以寫一個「直線排列行列式」

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
A & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
B & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
C & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
D & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
D' & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

來計算此題，但注意隱形人 D、D' 出來的門可以互調，

因此真正的算法是

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} / 2! = 32$$ ■

【問題五】一教室有 n 個不同的門，m 個人由不同的門進入再由不同的門出來，$n > m$，若每人均不可由相同的門進出，則進出的方法共有________種？

【解法】第一階段，考慮 m 人依序進入，則共有 P^{n}_{m} 種方法。不失一般性，假設 A_1、A_2、⋯、A_m 分別從 1、2、⋯、m 號門進入。

第二階段，考慮 A_1、A_2、⋯、A_m 依序出來，此時 A_1、A_2、⋯、A_m 分別不能從第 1、2、⋯、m 號門出來。爲了補足 n 個人，我們特地加 $(n-m)$ 個隱形人 A_{m+1}、A_{m+2}、⋯、A_n 尾隨 A_1、A_2、⋯、A_m 出來，而 A_{m+1}、A_{m+2}、⋯、A_n 出來是沒有限制的，則我們可以寫一個「直線排列行列式」

$$\left|\begin{matrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & {\huge 1} & \\ & & 0 & & & \\ & {\huge 1} & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{matrix}\right|$$

來計算此題，但注意隱形人 A_{m+1}、A_{m+2}、⋯、A_n 出來的門可以互調，因此真正的算法是

$$\left|\begin{matrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & {\huge 1} & \\ & & 0 & & & \\ & {\huge 1} & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{matrix}\right| /(n-m)! = \frac{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C^{m}_{k} P^{n-k}_{m-k}}{(n-m)!}$$

■

【結論】『一個人只能從一個門出來』恰好與「直線排列行列式」展開項中的『一項僅由每行中各出一個數且每列中各出一個數相乘構成』的性質互相呼應，所以我覺得「直線排列行列式」的這種方法應該可以應用在不少的排列組合問題上。

最後在此我特別感謝建國中學的陳庭雄老師，以及我的實習指導老師建國中學的翁福永老師在思維上給予我的幫助，讓我在建中實習的一年期間對於高中數學的深入研究有了初步的實踐。