優勢-有向圖形

在許多人類團體或動物群中，常存在有“尊卑順序” (pecking order) 或團體之二成員間有優勢關係，亦即，團體中的任意二成員 A 與 B 間，若不是 A 支配 B 則爲 B 支配 A，且兩者不能同時成立。以 $P_i \to P_j$ 之有向圖形代表 P_i 支配 P_j，則上述的關係意指對所有的相異組對，若不是 $P_i \to P_j$ 則爲 $P_j \to P_i$，且兩者不能同時成立。一般而言，可以有下列的定義。

定義：優勢-有向圖形(dominance-directed graph) 爲使得任意相異頂點 P_i 與 P_j 的組對 (pair)，若非 $P_i \to P_j$ 即 $P_j \to P_i$ 但不能同時成立的有向圖形。

一擁有 n 支球隊的聯盟進行循環賽時，每一支球隊皆須與其他球隊比賽一場，且每一場比賽一定要分出勝負，即爲滿足上面定義之有向圖形的例子。假若以 $P_i \to P_j$ 表示 P_i 隊與 P_j 隊交手時，P_i 擊潰 P_j，則很明顯地可看出本例滿足優勢-有向圖形的定義。因此之故，優勢-有向圖形有時亦被稱作**競賽圖** (tournaments)。

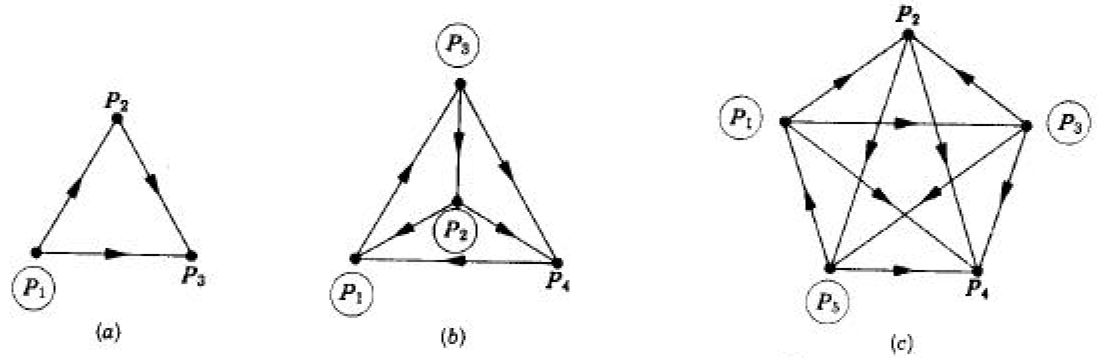


圖 12

圖 12 所示三個優勢-有向圖形分別包括三個、四個及五個頂點。在此三圖中，用圓圈圈出的頂點具有下述有趣的性質：由每個此類頂點至圖中其他任一頂點若不是單-步連結則爲 2-步連結。若以此三圖當作競賽圖時，這些頂點（球隊）即表示“有實力的”球隊，這些球隊若不是打敗對手，便是打敗曾經勝過指定對手的其他球隊。現在介紹下列定理並加以證明，此定理保證任一優勢-有向圖形至少有一頂點具有此處所述的性質。

定理 11.7.3： 任一優勢-有向圖形中至少存在一頂點，由該頂點有一單-步或 2-步連結至其他任意頂點。

證明：考慮某優勢-有向圖形中至其他頂點的單-步連結與 2-步連結之總數爲最大的頂點（亦可能有數點），重新賦予各頂點號碼並設該頂點爲 P_1。假設存在某頂點 P_i，使得由 P_1 至 P_i 沒有單-步或 2-步連結存在，則 $P_1 \to P_i$ 不成立，所以由優勢-有向圖形的定義可知 $P_i \to P_1$ 必成立。其次，令 P_k 爲滿足 $P_1 \to P_k$ 之任意頂點。則 $P_k \to P_i$ 不能成立：因爲若成立，則 $P_1 \to P_k \to P_i$ 將是 P_1 至 P_i 的 2-步連結，於是 $P_i \to P_k$ 必然成立。亦即，P_i 到與 P_1 以單步連結的所有頂點有單步驟連結，而 P_i 到與 P_1 以 2-步連結的所有頂點也是 2-步連結。但除此之外，尙有 $P_i \to P_1$，這表示 P_i 擁有的單步與 2-步連結的總數必大於 P_1，此與本證明的前題相矛盾。故頂點 P_i 不存在。亦即，P_1 至其他頂點必有一單-步連結或 2-步連結。本定理得證。▮

此一證明顯示對其他頂點具有總數最多的單-步與2-步連結的頂點，會擁有定理中所陳述的性質。有一種使用頂點矩陣 M 及其平方 M^2 來求此類頂點的簡易方法：因爲 M 中第 i 列各元素的和即爲由 P_i 至其他頂點之單-步連結的總數，且 M^2 中第 i 列各元素的和亦爲由 P_i 至其他頂點之 2-步連結的總數，因此，矩陣 $A = M + M^2$ 中第 i 列元素的和即爲由 P_i 至其他頂點之單-步與 2-步連結的總數。易言之，矩陣 $A = M + M^2$ 中各列之元素和爲最大者，可確認具有定理 11.7.3 所述性質的頂點。

例題 7

假設有五支棒球隊彼此各比賽一場，比賽結束後各隊的戰績如圖 13 的優勢-有向圖形所示。此優勢-有向圖形的頂點矩陣爲

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

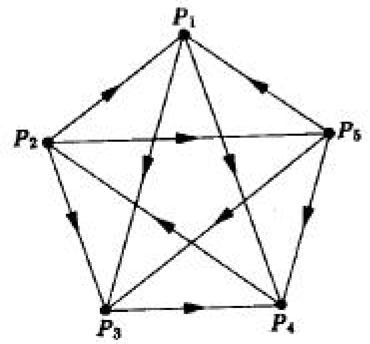


圖 13

因此

$$A = M + M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A 中各列之和爲:

第一列元素和 = 4
第二列元素和 = 9
第三列元素和 = 2
第四列元素和 = 4
第五列元素和 = 7

因第二列元素和最大，頂點 P_2 至其他頂點必有單-步連結或 2-步連結，由圖13 即可很明顯地看出。▲

前面已非正式地暗示，假若一頂點至其他頂點的單-步連結與 2-步連結之總數爲最大時，此頂點即爲“有實力的”頂點。此觀念正式定義如下:

定義: 一優勢-有向圖形中，一個頂點所具之**實力** (power) 即爲該頂點至其他頂點之單-步與2-步連結的總數。易言之，頂點 P_i 所具之實力即爲矩陣 $A = M + M^2$ 中第 i 列的元素和，此處 M 爲有向圖形的頂點矩陣。

例題 8

現在依據各隊的實力，替例題 7 中的五支棒球隊排名次。由例題 7 中各列元素和之計算，可得

P_1 隊的實力 = 4
P_2 隊的實力 = 9
P_3 隊的實力 = 2
P_4 隊的實力 = 4
P_5 隊的實力 = 7

故依據各隊的實力，五支球隊的名次如下所示: P_2（第一名），P_5（第二名），P_1 與 P_4（同爲第三名），P_3（第五名）▲

習題集 11.7

1. 試依據圖14 所示的有向圖形，寫出各小題的頂點矩陣。

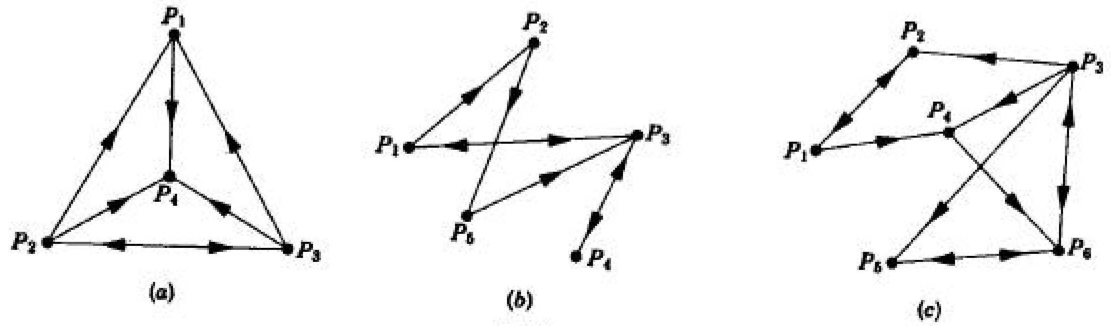


圖 14

2. 試依據下列各小題的頂點矩陣，畫出與其對應的有向圖形。

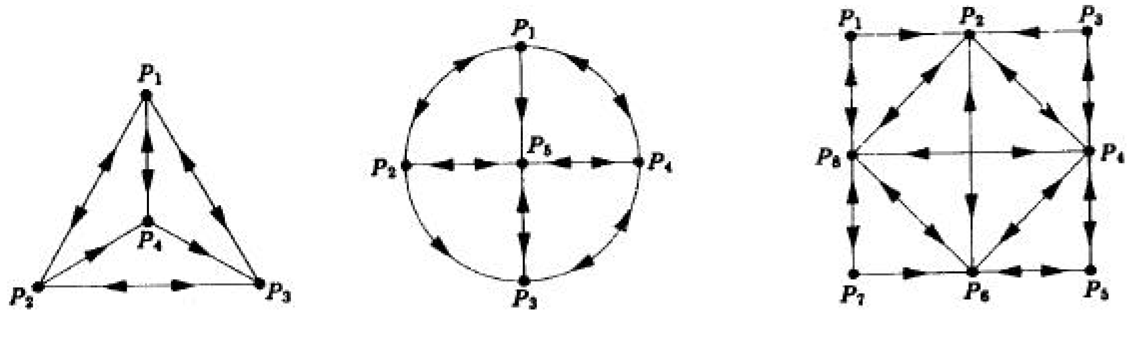
(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. 假設某有向圖形的頂點矩陣 M 爲

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) 畫出與 M 對應的有向圖形。
(b) 使用定理 11.7.1，求出由頂點 P_1 至頂點 P_2 之單-步，2-步及 3-步連結的數目。並如例題 3 列出每個連結以驗證你所得的答案。
(c) 重複 (b) 部份，求 P_1 至 P_4 的單-步，2-步及 3-步連結。

4. 使用觀察法，找出圖形 15 中各有向圖所可能擁有的糾集。



(a) (b) (c)

圖 15

5. 對下列各頂點矩陣，使用定理 11.4.2 求與之對應之有向圖形所可能擁有的糾集。

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. 試寫出圖16 所示之優勢-有向圖形的頂點矩陣，並求各頂點所具之實力。

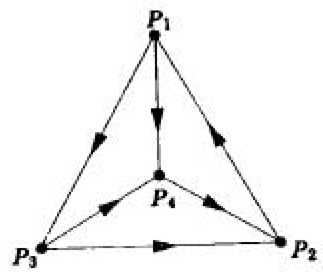


圖 16

7. 五支棒球隊彼此各比賽一場，比賽結束後各隊的戰績如下所示:

A 擊敗 B, C, D
B 擊敗 C, E
C 擊敗 D, E
D 擊敗 B
E 擊敗 A, D

試依據上述資料畫出優勢-有向圖形及頂點矩陣，並依據各隊的實力排列名次。

例題

兩家彼此競爭的電視網（R 與 C）分別計畫在同一時段推出長達一小時的電視節目。其中 R 視有三個企劃案可資選擇，C 視有四個企劃案可資選擇。由於彼此不知對方要推出那個節目，提供他們預估各個企劃案配對後收視率的分佈情形。兩家電視要求同一家收視調查公司提供他們這些企劃案所有可能配對的收視率分佈。該收視調查公司完成的收視率調查如表 2 所示，表中元素 (i, j) 表示 R 視推出節目 i 對抗 C 視節目 j 時，R 視所得的收視率。（假設開機率為 100%）

表 2　R 視的收視率

		C 視節目			
		1	2	3	4
R 視節目	1	60	20	30	55
	2	50	75	45	60
	3	70	45	35	30

若欲獲得最高收視率，兩家電視臺各應推出什麼節目?

解: 將表 2 中各元素值減掉50，則成下面矩陣

$$\begin{bmatrix} 10 & -30 & -20 & 5 \\ 0 & 25 & -5 & 10 \\ 20 & -5 & -15 & -20 \end{bmatrix}$$

此即為二人零和對局中開始時二電視網各擁有 50% 收視率的支付矩陣，矩陣中元素 (i, j) 表示節目 i 與 j 對抗時，C 視輸給 R 視的收視率。很容易地可看出元素

$$a_{23} = -5$$

為支付矩陣的鞍點。因此，R 視的最佳策略是推出節目 2，而 C 視的最佳策略即為推出節目 3。其結果為 R 視獲得 45% 的收視率，而 C 視的收視率為 55%。▲