黎昂迪夫封閉（投入-產出）模型

首先提出一個簡單例子，然後進行此模型之一般理論的介紹。

例題 1

有三位屋主 — 一位木匠，一位電氣工及一位鉛管工 — 同意群策群力整修他們各自擁有的房屋，並且同意每人如下表所示工作 10 天。

	工作執行者		
	木匠	電氣工	鉛管工
在木匠家工作的天數	2	1	6
在電氣工家工作的天數	4	5	1
在鉛管工家工作的天數	4	4	3

爲了納稅之目的，他們三人必須彼此支付每日工作酬勞，即使在自己家中工作也不能例外。他們正常的每日工資大約$100，但他們同意調整工資以使得每位屋主皆可達到收支相抵，亦即，收入金額與支出金額相等。因此可假設

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \text{木匠的每日工資}\\
p_2 &= \text{電氣工的每日工資}\\
P_3 &= \text{鉛管工的每日工資}
\end{aligned}
$$

欲滿足每位屋主都達到收支相抵之“平衡”條件，必須每位屋主在 10 天之工作期的

$$\text{總支出} = \text{總收入}$$

例如，木匠需支付 $2p_1 + p_2 + 6p_3$ 以整修自己的房屋，但同時亦有 10 天的工作收入 $10p_1$。其平衡方程式如下面的第一個方程式:

$$
\begin{aligned}
2p_1 + p_2 + 6p_3 &= 10p_1\\
4p_1 + 5p_2 + p_3 &= 10p_2\\
4p_1 + 4p_2 + 3p_3 &= 10p_3
\end{aligned}
$$

其餘二個方程式則爲電氣工及鉛管工的平衡方程式。若將上述三個方程式皆遍除 10 且以矩陣形式表示，則爲

$$
\begin{bmatrix} .2 & .1 & .6 \\ .4 & .5 & .1 \\ .4 & .4 & .3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}
\qquad (1)
$$

(1) 式經過移項整理後，可得齊次方程組

$$
\begin{bmatrix} .8 & -.1 & -.6 \\ -.4 & .5 & -.1 \\ -.4 & -.4 & .7 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

解此方程組可得（驗證之）

$$
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}
= s
\begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}
$$

其中 s 爲任意常數。此常數是一比例因子，其值可由屋主依實際需要加以設定。例如，他們可設定 $s = 3$ 以使得各人的每日工資 — \$93，\$96 及\$108 — 皆接近於 \$100。▲

此例題說明了在一封閉經濟體系中，黎昂迪夫投入-產出模型的顯著特色。基本方程式 (1) 的係數矩陣中，每一行的元素和皆爲 1，此對應於每位屋主努力之“產出”，係依照各行元素所示之比例完全分配予各位屋主的事實。該問題的核心便是要決定這些產出的適當“價格”，以使得整個體系處於平衡狀態，也就是使得每位屋主的總花費等於他或她的總收入。

在一般經濟模型中，考慮一個擁有有限企業個體之經濟體系，此處分別以企業 1，企業 2，$\cdots$，企業 k 表示各企業個體。經過一固定週期的生產過程後，各企業個體皆能由這 k 個企業個體先期決定的方式依照“產出” 某數量的商品或勞務。一個重要的問題即是要求出這 k 種產物適當的交換“價格”，以使得每一企業個體的總支出等於總收入。如此的價格結構即表示該經濟體系達到平衡狀態。

在經過某固定生產週期後，假設

$$
\begin{aligned}
p_i &= \text{企業}i\text{ 總產出物的交換價格}\\
e_{ij} &= \text{企業}i\text{ 向企業 }j\text{ 購買的商品佔企業}j\text{ 總產出的比例}
\end{aligned}
$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, k$。依定義，可得

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && p_i \geq 0, && i = 1, 2, \cdots, k\\
&\text{(ii)} && e_{ij} \geq 0, && i, j = 1, 2, \cdots, k\\
&\text{(iii)} && e_{1j} + e_{2j} + \cdots + e_{kj} = 1, && j = 1, 2, \cdots, k
\end{aligned}
$$

利用這些數值，可以建構**價格向量** (price vector)

$$
\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}
$$