三次方程式求解公式

【方法一】卡爾丹(Cardano)方法

精神：$\begin{cases} \text{1.利用綜合除法} \Rightarrow \text{消去平方項係數} \\ \text{2.利用立方公式} \Rightarrow \text{比較係數} \\ \text{3.利用二次方公式解一根} \Rightarrow \text{配合}\omega\text{，}\omega^2\text{解另兩根} \end{cases}$

狀況一

$x^3 + px + q = 0$

公式(I)：

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$or \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega^2$$

$$or \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega$$

判別式：$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow \begin{cases} D > 0 \text{ 一實根兩虛根} \\ D = 0 \text{ 至少兩等根} \\ D < 0 \text{ 三實根} \end{cases}$

狀況二

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

公式(II)：

$$x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2} + \sqrt{\left(\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2}\right)^2 + (3b - a^2)^3}}$$

$$+ \frac{1}{3}\sqrt[3]{-\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2} - \sqrt{\left(\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2}\right)^2 + (3b - a^2)^3}} - \frac{a}{3}$$

另兩根方法同狀況一

狀況三

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

公式(III)：令$a = \frac{B}{A}$，$b = \frac{C}{A}$，$c = \frac{D}{A}$ 代入公式(II)

【證明】：1° 令 $x = u + v$ 代入下式

兩邊立方 $x^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(\underline{\underline{u+v}})$

$= u^3 + v^3 + 3uv(\underline{\underline{\ x\ }})$

移項整理 $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$

2° 比較係數 $x^3 + px + q = 0$

得 $\begin{cases} u \cdot v = -\dfrac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 \cdot v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$

3° 令 $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$ 兩根爲 u^3，v^3

則 $\begin{cases} u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \\ v^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \end{cases}$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ or \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)\omega \ or \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)\omega^2$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ or \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)\omega \ or \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)\omega^2$$

再配合 $u^3 \cdot v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$ 可得三根

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ \omega + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ \omega^2$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ \omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ \omega$$

《說明例》實地演練：

試解 $x^3-6x^2+11x-6=0$

【解】：$\boxed{\text{方法一}}$直接代入公式(II)

$\boxed{\text{方法二}}$利用綜合除法化簡為公式 $x^3+px+q=0$ 再代入公式(I)

$$\left(\text{以}(x+\frac{a}{3})\text{表 } x^3+ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \text{使得平方項係數為}0\right)$$

1°

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & 11 & -6 & \underline{2} \\ & 2 & -8 & 6 & \\ \hline 1 & -4 & 3 & 0 & \\ & 2 & -4 & & \\ \hline 1 & -2 & -1 & & \\ & 2 & & & \\ \hline 1 & 0 & & & \end{array}$$

$\therefore x^3-6x^2+11x-6=(x-2)^3-(x-2)=t^3-t=0$ 代入公式 (1) 解 t

2° 此時$\begin{cases} p=-1 \\ q=0 \end{cases}$，$D=\dfrac{0^2}{4}+\dfrac{(-1)^3}{27}<0$，故有三實根 t_1, t_2, t_3

$$\Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}, & \dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega, & \dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2 \\ v=-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}, & -\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2, & -\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega \end{cases} \quad \left(\text{取 } \omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}=0 \\ t_2=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(\omega-\omega^2)=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(2\omega+1)=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}i=\sqrt[3]{i}\cdot\sqrt[3]{i^3}=1 \\ t_3=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(\omega^2-\omega)=-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(2\omega+1)=-t_2=-1 \end{cases}$$

3° 又由關係式 $x-2=t$ 故 $x=1,2,3$

四三次方程式求解公式

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

同除 A $\quad\Rightarrow\quad x^4 + \frac{B}{A}x^3 + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A} = 0$

即 $\quad\Rightarrow\quad x^4 + B'x^3 + C'x^2 + D'x + E' = 0$

□原則：

以 $(x + \frac{B'}{4})$ 表之 $\Rightarrow\quad (x + \frac{B'}{4})^4 + p(x + \frac{B'}{4})^2 + q(x + \frac{B'}{4}) + r = 0$

求解 $\quad\Rightarrow\quad t^4 + pt^2 + qt + r = 0$ 四根

則 $t_1 - \frac{B'}{4}, t_2 - \frac{B'}{4}, t_3 - \frac{B'}{4}, t_4 - \frac{B'}{4}$ 即得x的四個根

$$D = 4(p^2 + 12r)^3 - (2p^3 - 72pr + 27q^2)^2$$

判別式：
$$\begin{cases} D > 0 \quad\Rightarrow\quad \text{四實根 } or \text{ 四虛根} \\ D = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{至少兩相等實根} \\ D < 0 \quad\Rightarrow\quad \text{兩實根兩虛根} \end{cases}$$

【方法一】尤拉(Euler)方法

解 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

□精神：
$$\begin{cases} \text{1.利用四次方公式及 } 2x = u + v + w \Rightarrow \text{比較係數} \\ \text{2.利用三次方公式解係數方程式}(u^2\text{、}v^2\text{、}w^2\text{的值}) \\ \text{3.再帶回}x = \dfrac{u+v+w}{2}\text{求解四次方乘式四個根} \end{cases}$$

【解】：1° 設 $2x = u + v + w$

平方 $4x^2 = (u^2 + v^2 + w^2) + 2(uv + vw + wu)$

移項再平方 $\left(4x^2 - (u^2 + v^2 + w^2)\right)^2 = \left(2(uv + vw + wu)\right)^2$

$$16x^4 - 8x^2(u^2+v^2+w^2) + (u^2+v^2+w^2)^2 = 4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) + 8uvw(\underline{\underline{u+v+w}})$$

$$16x^4 - 8x^2(u^2+v^2+w^2) + (u^2+v^2+w^2)^2 = 4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) + 8uvw(\underline{\underline{\;2x\;}})$$

$$x^4 - \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)x^2 - (uvw)x + \frac{1}{16}\left[u^4+v^4+w^4 - 2(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)\right] = 0$$

$$x^4 + \quad p \cdot x^2 \quad + \; q \cdot x + \quad r \quad = 0$$

2° 比較係數 $\therefore \begin{cases} p = -\dfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \\ q = -uvw \\ r = \dfrac{1}{16}\left[u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2)\right] \end{cases}$

3° 可解出 $\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -2p \\ u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = p^2 - 4r \\ u^2v^2w^2 = q^2 \end{cases}$

利用三次方根與係數知

4° 此時 u^2, v^2, w^2 為 $z^3 + \underline{\underline{2p}} \cdot z^2 + \underline{\underline{(p^2 - 4r)}} \cdot z \underline{\underline{- q^2}} = 0$ 之三根

令 $\begin{cases} a = 2p \\ b = p^2 - 4r \\ c = -q^2 \end{cases}$ 代入公式 (II) 解出 u^2, v^2, w^2 後

5° 得 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u + v + w) \\ or \quad \dfrac{1}{2}(u - v - w) \\ or \quad \dfrac{1}{2}(-u + v - w) \\ or \quad \dfrac{1}{2}(-u - v + w) \end{cases}$

【方法二】笛卡爾(Descartes)方法

解 $x^4+px^2+qx+r=0$

□精神：$\begin{cases}\text{1.強迫分解出四次式爲兩個二次式乘積}\\ \text{2.利用比較係數解出}k\text{、}l\text{、}m\text{三者關係式(爲三次式)}\\ \text{3.利用公式(}II\text{)解出}k\text{(及}l\text{、}m\text{)}\\ \text{4.將結果代入兩個二次式中解出四個根}\end{cases}$

【證明】: 1° 設 $x^4+px^2+qx+r=(x^2+kx+l)\cdot(x^2-kx+m)=0\cdots(1)$

乘開比較係數：$\begin{cases}m+l-k^2=p\cdots(2)\\ k\cdot(m-l)=q\cdots(3)\\ l\cdot m=r\cdots(4)\end{cases}$

由(2)，(3) 解出$(m，l)=\left(\dfrac{q+pk+k^3}{2k},\dfrac{-q+pk+k^3}{2k}\right)\cdots(5)$ 代入(4)

2° $\dfrac{q+pk+k^3}{2k}\times\dfrac{-q+pk+k^3}{2k}=\dfrac{(k^3+pk)^2-q^2}{4k^2}=r$

$\Rightarrow (k^2)^3+2p(k^2)^2+(p^2-4r)(k^2)-q^2=0$

$\Rightarrow k^2=z\cdots(6)$

$\Rightarrow k^2$ 爲 $z^3+2p\cdot z^2+(p^2-4r)\cdot z-q^2=0$ 之一根

代入公式 (II) 可得三根 z_1、z_2、z_3

3°利用(5)及(6)解出k、l、m再代回(1)式

利用二次方公式解解出

所得即爲四次方程式之解

【方法三】費拉里(Ferrari)方法

解 $x^4+px^2+qx+r=0$

精神：
$$\begin{cases} 1.\text{同加}\underline{\underline{x^2y+\dfrac{y^2}{4}}}\text{強迫分解出四次式爲兩個多項式的平方差} \\ 2.\text{利用比較係數解出}y\text{的三次式} \\ 3.\text{利用公式}(II)\text{解出}y \\ 4.\text{將}y\text{代入二次式中解出四個根} \end{cases}$$

【證明】: 1° $x^4+px^2+qx+r=0 \Rightarrow x^4=-px^2-qx-r$

兩邊同加 $x^2y+\dfrac{y^2}{4}$ $\quad\Rightarrow x^4+(x^2y+\dfrac{y^2}{4})=-px^2-qx-r+(x^2y+\dfrac{y^2}{4})$

兩邊配方 $\underbrace{(x^2+\dfrac{y}{2})^2}_{\because\text{是完全平方}}=\underbrace{(y-p)x^2-qx+(\dfrac{y^2}{4}-r)}_{\therefore\text{必是完全平方}}\cdots(1)$

2°故判別式 $=D=(-q)^2-4(y-p)\cdot(\dfrac{y^2}{4}-r)=0$

展開得 $y^3-p\cdot y^2-4r\cdot y+(4pr-q^2)=0$

代入公式(II) 得三根 y_1、y_2、y_3 $(y\neq p)$

3° $\therefore$(1)式 可整理得 $(x^2+\dfrac{y}{2})^2=(y-p)\left[x-\dfrac{q}{2(y-p)}\right]^2\cdots(2)$

$$x^2+\frac{y}{2}=\pm\sqrt{(y-p)}\cdot\left[x-\frac{q}{2(y-p)}\right]$$

4° 將y_1、y_2、y_3上式結果代入 $x^2\mp\sqrt{(y-p)}\,x+(\dfrac{y}{2}\pm\dfrac{q}{2\sqrt{(y-p)}})=0$

並利用二次方程式公式解解x，

所得即爲 $x^4+px^2+qx+r=0$四次方程式之解

結束(over)

資料整理:103 班 23 號