三次方程式求解公式

【方法一】卡爾丹(Cardano)方法

精神：$\begin{cases} 1.\text{利用綜合除法} \Rightarrow \text{消去平方項係數} \\ 2.\text{利用立方公式} \Rightarrow \text{比較係數} \\ 3.\text{利用二次方公式解一根} \Rightarrow \text{配合}\omega\text{，}\omega^2\text{解另兩根} \end{cases}$

狀況一 $x^3 + px + q = 0$

公式(I)：

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$or \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega^2$$

$$or \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega$$

判別式：$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow \begin{cases} D > 0 \text{ 一實根兩虛根} \\ D = 0 \text{ 至少兩等根} \\ D < 0 \text{ 三實根} \end{cases}$

狀況二 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

公式(II)：

$$x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2} + \sqrt{\left(\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2}\right)^2 + (3b - a^2)^3}}$$

$$+ \frac{1}{3}\sqrt[3]{-\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2} - \sqrt{\left(\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2}\right)^2 + (3b - a^2)^3}} - \frac{a}{3}$$

另兩根方法同狀況一

狀況三 $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

公式(III)：令$a = \frac{B}{A}$，$b = \frac{C}{A}$，$c = \frac{D}{A}$ 代入公式(II)

【證明】：1° 令 $x = u + v$ 代入下式

兩邊立方 $x^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(\underline{\underline{u+v}})$

$$= u^3 + v^3 + 3uv(\underline{\underline{\ x\ }})$$

移項整理 $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$

2° 比較係數 $x^3 \quad + \quad px \qquad + q \qquad = 0$

得 $\begin{cases} u \cdot v = -\dfrac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 \cdot v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$

3° 令 $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$ 兩根爲 u^3 , v^3

則 $\begin{cases} u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \\ v^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \end{cases}$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ or \ \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)\omega \ or \ \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)\omega^2$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ or \ \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)\omega \ or \ \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right)\omega^2$$

再配合 $u^3 \cdot v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$ 可得三根

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega^2$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega$$

《說明例》實地演練：

試解 $x^3-6x^2+11x-6=0$

【解】：$\boxed{\text{方法一}}$直接代入公式(II)

$\boxed{\text{方法二}}$利用綜合除法化簡爲公式 $x^3+px+q=0$ 再代入公式(I)

$$\left(\text{以}\,(x+\frac{a}{3})\,\text{表}\ x^3+ax^2+bx+c=0\Rightarrow\text{使得平方項係數爲}0\right)$$

1°

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -6 & 11 & -6 & \underline{2} \\
 & 2 & -8 & 6 & \\
\hline
1 & -4 & 3 & & 0 \\
 & 2 & -4 & & \\
\hline
1 & -2 & & & -1 \\
 & 2 & & & \\
\hline
1 & , & 0 & &
\end{array}$$

$\therefore\ x^3-6x^2+11x-6=(x-2)^3-(x-2)=t^3-t=0$ 代入公式 (1) 解 t

2° 此時$\begin{cases}p=-1\\ q=0\end{cases}$，$D=\dfrac{0^2}{4}+\dfrac{(-1)^3}{27}<0$，故有三實根 t_1, t_2, t_3

$$\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\ ,\ \dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega\ ,\ \dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2\\ v=-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\ ,\ -\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2\ ,\ -\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega\end{cases}\qquad\left(\text{取}\ \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_1=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}=0\\ t_2=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(\omega-\omega^2)=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(2\omega+1)=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}i=\sqrt[3]{i}\cdot\sqrt[3]{i^3}=1\\ t_3=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega=\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(\omega^2-\omega)=-\dfrac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(2\omega+1)=-t_2=-1\end{cases}$$

3° 又由關係式 $x-2=t$ 故 $x=1,2,3$

資料整理:103 班 23 號 張林承