圖形理論

本節將介紹集合中各成員間之關係的矩陣表示法，並使用矩陣算術以分析這些關係。

預備知識 矩陣乘法與加法

成員數目有限，且各成員間存在某種關係的集合，其例難以數計。例如，集合中可能含人、動物、國家、公司，運動團隊，或城市的總集；而此類中兩成員，A 與B 間的關係可能是 A 員宰制 B 員，動物 A 以動物 B 爲食，國家 A 軍事援助國家 B，國家 A 銷售其產品至國家 B，運動團隊A 慣常地擊敗運動團隊 B，或城市 A 有直飛城市 B 的航線。

現在將展示有向圖形理論(directed graphy theory) 如何使用於類似前述各例的數學模式的關係中。

有向圖形

有向圖形(directed graph) 爲元素 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$，再合併有限的相異元素的有序對 (P_i, P_j)，而且無重複之有序對的總集 (collection) 的有限集合。該集合中的各元素稱爲**頂點**(vertices)，而各有序對稱爲有向圖形的**有向稜** (directed edge)。本書用符號 $P_i \to P_j$ 〔讀成“ P_i 向 P_j 連結”(P_i is connected to P_j)〕以顯示有向稜 (P_i, P_j) 屬於該有向圖形。就幾何上而言，有向圖形（圖 1）可藉在平面中以點代表頂點，並以自頂點 P_i 向頂點 P_j 繪製具有由 P_i 指向 P_j 之矢尖的線段或弧線予以視覺化。若 $P_i \to P_j$ 與 $P_j \to P_i$ 都成立，可在 P_i 與 P_j 間繪一具有兩相反指向矢尖的線段（如圖中的 P_2 與 P_3 間所示者）。

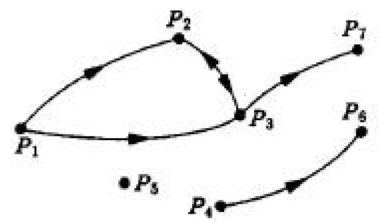

圖 1

例如圖 1，有向圖形可能有僅由一些頂點本身相連結而成的分離的“分支”(components)；而有些頂點，例如 P_5，可能不與其他任何頂點相連結。而且，因爲有向圖形中不容許 $P_i \to P_i$，單一頂點不能以未通過任意其他頂點的單一弧線與本身相連結。

圖 2 中是另外三個有向圖形範例的表示圖。具有 n 個頂點的有向圖形可使用稱

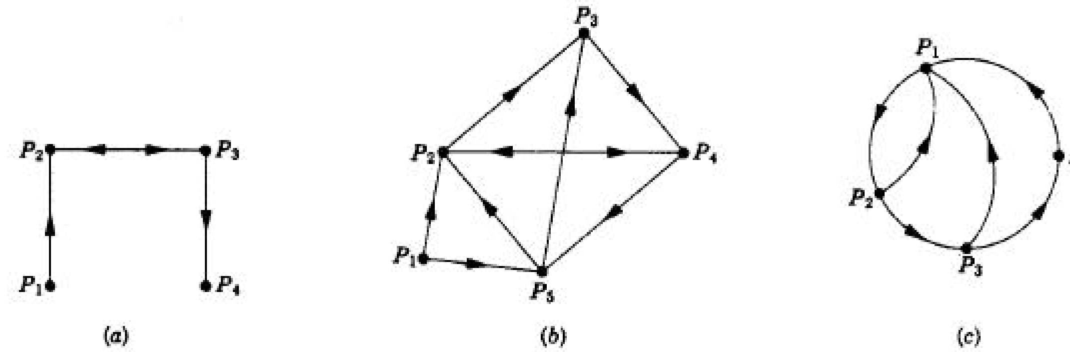

圖 2

爲有向圖形之**頂點矩陣**(vertex matrix) 的 $n \times n$ 階矩陣 $M = [m_{ij}]$ 與之相伴。該矩陣的各元素定義爲，對 $i, j = 1, 2, \cdots, n$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } P_i \to P_j \\ 0, & \text{其他情況} \end{cases}$$

對圖 2 中的有向圖形，其對應的頂點矩陣如下：

圖 2a:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

圖 2b:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

圖 2c:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

依它們的定義，頂點矩陣具有下列兩項性質：

(i) 所有的元素非 0 即 1。
(ii) 所有的對角元素均為零。

相反地，任何具有這兩項性質的矩陣將決定唯一的有向圖形，矩陣本身即為該有向圖形的頂點矩陣。例如，矩陣

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

決定了圖 3 中的有向圖形。

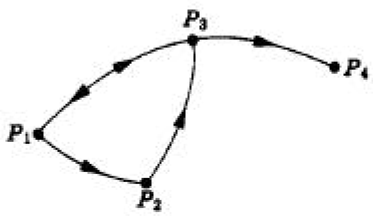

圖 3

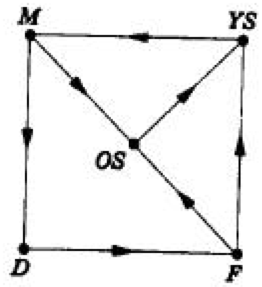

圖 4

例題 1

某家庭由母親、父親、女兒及兩個兒子組成。該家庭的各成員彼此間以下列方式產生影響力或權威：母親能影響女兒與大兒子；父親能影響兩個兒子；女兒能影響父親；大兒子能影響小兒子；小兒子能影響母親。此處將使用以組成家庭的五個成員為頂點的有向圖形作為該家庭之影響模式 (pattern) 的模型。若家庭成員 A 影響家庭成員 B，可寫成 $A \to B$。圖 4 為所得到的有向圖形，其中以明顯的字母標示五個家中的成員。該有向圖形的頂點矩陣為

$$\begin{array}{c} \\ M \\ F \\ D \\ OS \\ YS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} M & F & F & OS & YS \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

例題 2

西洋棋中，騎士 (knight) 在棋盤上行走的路徑為 L 形。若以圖 5 所示之棋盤而言，騎士所行的路徑可能為先橫行二格後再縱走一格，或先縱走二格後再橫行一格，因此，若由圖 5 所示棋盤的中心位置，騎士可到達圖 5 中陰影所示的 8 個位置。假設限制騎士僅能處於圖 6 所示之九格棋盤上。若以 $i \to j$ 表示騎士可能由位置 i 走至位置 j，則圖 7 展示的有向圖形即為騎士在九格之限制下可能採行的走法。圖 8 所示為圖 7 的另一種表示法。

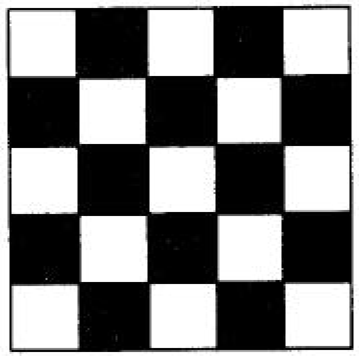

圖 5

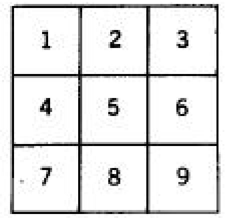

圖 6

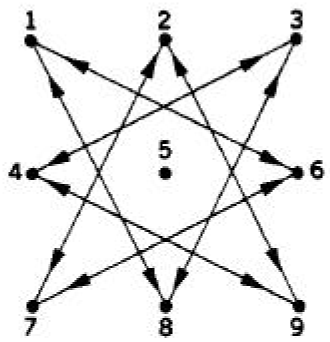

圖 7

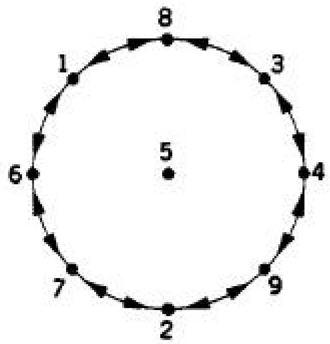

圖 8

本題有向圖形之頂點矩陣為

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$ ▲

例題 1 中，父親無法直接影響母親，亦即 $F\to M$ 不成立，但他能影響小兒子，而小兒子又能影響母親，將此項關係用 $F\to YS\to M$ 表示，並稱其為由 F 到 M 的 **2-步連結**(2-step connection)。同理，$M\to D$ 為**單步連結**，$F\to OS\to YS\to M$ 為 **3-步連結**，$\cdots$ 等等。現在即將針對此定義，考慮任意有向圖形中由頂點 P_i 至另一頂點 P_j 之所有可能 r-步連結 $(r=1,2,\cdots)$ 的數目（也包含 P_i 及 P_j 為同一頂點的情形）。P_i 及 P_j 之單步連結的數目，單純地為 m_{ij}，亦即，由 P_i 至 P_j 的單步連結是 0 或 1 完全視 m_{ij} 是 0 或 1 而定。至於 2-步連結，將考慮頂點矩陣的平方。若令 M^2 的第 (i,j) 元素為 $m_{ij}^{(2)}$，則可得

$$m_{ij}^{(2)}=m_{i1}m_{1j}+m_{i2}m_{2j}+\cdots+m_{in}m_{nj} \tag{1}$$

上式中，假若 $m_{i1}=m_{1j}=1$，則由 P_i 至 P_j 有一個 2-步連結 $P_i\to P_1\to P_j$；但若 m_{i1} 或 m_{1j} 中有一個為零，則由 P_i 至 P_j 的 2-步連結便不成立。因此，$P_i\to P_i\to P_j$ 是一個 2-步連結若且唯且 $m_{i1}m_{1j}=1$。同理，對任意的 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$P_i\to P_k\to P_j$ 是一個由 P_i 至 P_j 的 2-步連結若且唯若 (1) 式中等號右邊的 $m_{ik}m_{kj}$ 項為1；否則將為0。故 (1) 式等號右邊各項的和即為由 P_i 至 P_j 之 2-步連結的總數目。

同樣地，也可以求得由 P_i 至 P_j 之 3-,4-, $\cdots$ 步連結的總數目。因此其結果可整理為下述定理。

定理 11.7.1：假設有向圖形的頂點矩陣為 M，且 M^r 的第 (i,j) 元素為 $m_{ij}^{(r)}$ 時，則 $m_{ij}^{(r)}$ 即為由 P_i 至 P_j 之 r-步連結的數目。

例題 3

圖 9 所示為聯絡城市 P_1, P_2, P_3 及 P_4 間的航運略圖，若將此圖視為一有向圖形，則其頂點矩陣為

$$M=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

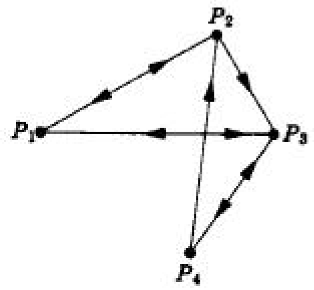

圖 9

因此可得

$$M_2=\begin{bmatrix}2&0&1&1\\1&1&1&1\\0&2&2&0\\2&0&1&1\end{bmatrix}$$

及

$$M_3=\begin{bmatrix}1&3&3&1\\2&2&3&1\\4&0&2&2\\1&3&3&1\end{bmatrix}$$

假若現在要探討的是由城市 P_4 至城市 P_3 的連結，則我們可應用定理 11.7.1 來求連結的數目。因 $m_{43}=1$ 故有一個單步連結；又因 $m_{43}^{(2)}=1$ 故亦有一個 2-步連結；再者，因 $m_{43}^{(3)}=3$，故亦有三個 3-步連結。為驗證此結果，分析圖 9 如下：

由 P_4 至 P_3 的單步連結：　$P_4\to P_3$

由 P_4 至 P_3 的 2-步連結：　$P_4\to P_2\to P_3$

由 P_4 至 P_3 的 3-步連結：　$P_4\to P_3\to P_4\to P_3$

$P_4\to P_2\to P_1\to P_3$

$P_4\to P_3\to P_1\to P_3$ ▲