馬可夫鏈

本節描述系統由某狀態轉移至另一狀態的一般模型，並將其應用至具體的問題上。

預備知識 線性方程組
矩陣
直觀之極限概念

假設某物理或數學系統在經歷一轉變過程後，於任何時刻將處於某有限數目狀態之一。例如，某時刻台北市的天氣狀況必是下面三種可能狀態之一：晴天、陰天、雨天。再者，曾先生可能處於下列四種情緒狀態之一：喜、怒、哀、樂。假設如此的系統係隨時間而由某狀態變化至另一狀態，並且於排定的時刻觀察此系統當時的狀態。假若該系統於任意觀察時刻之確實狀態無法確切決定，但卻可經由知曉先前觀察系統的狀態而推導出指定狀態發生的機率，則此變化過程稱為**馬可夫鏈** (Markov chain) 或**馬可夫過程** (Markov process)。

定義：若某馬可夫鏈有以 1, 2, $\cdots$, k 標示的 k 種可能狀態，則系統在某一觀察時處於 i 狀態，而其前一次的狀態是 j 的機率以 p_{ij} 表示，並稱 p_{ij} 為由狀態 j 至狀態 i 的**轉移機率**(transition probability)。矩陣 $P=[p_{ij}]$ 則稱為該馬可夫鏈的**轉移矩陣**(transition matrix)。

例如，在具有三種狀態的馬可夫鏈中，其轉移矩陣為

前一情況

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{ll} 1 & \text{新} \\ 2 & \text{情} \\ 3 & \text{況} \end{array}
\end{array}$$

在此矩陣中，元素 p_{32} 係表示系統將由狀態 2 變化至狀態 3 的機率；元素 p_{11} 係表示假若系統前一次是在狀態 1 而這一次仍將停留在狀態 1 的機率，並依此類推。

例題 1

某輛車出租經紀人擁有三處出租據點，分別標示以 1, 2, 3 。顧客可由任意出租據點租用輛車並且可在任意出租據點歸還輛車。依據經驗判斷，該經紀人求出顧客根據下述機率歸還輛車至各個出租據點：

出租據點

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} .8 & .3 & .2 \\ .1 & .2 & .6 \\ .1 & .5 & .2 \end{bmatrix} & \begin{array}{ll} 1 & \text{還} \\ 2 & \text{車} \\ 3 & \text{據點} \end{array}
\end{array}$$

此矩陣是將系統視為馬可夫鏈時的轉移矩陣。依據此轉移矩陣。由據點 3 出租之輛車將在據點 2 返還的機率是 0.6，由據點 1 出租之輛車將在據點 1 返還的機率是 0.8, $\cdots$，依此類推。▲

例題 2

根據捐贈記錄，某大學的校友會發現：捐款給年度聯誼基金的校友中有 80% 在下一年度將會做相同的捐獻，而不捐款的校友中有 30% 在下一年度將會捐款給年度聯誼基金。此情形可視為具有兩種狀態的馬可夫鏈：狀態 1 對應於每一年都捐獻的校友，狀態 2 對應於當年不作捐獻的校友。其轉移矩陣為

$$P=\begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix} \blacktriangle$$

由上述例題中，馬可夫鏈有“每一行之元素和等於 1”的性質。此一性質並非偶然。設若 $P=[p_{ij}]$ 是任意具有 k 種狀態之馬可夫鏈的轉移矩陣，則對每一 j ，必有

$$p_{1j}+p_{2j}+\cdots+p_{kj}=1 \tag{1}$$

因為若在某觀察點時，系統處於狀態 j，則下一次觀察時系統將會處於 k 種可能狀態之一。

具有性質 (1) 的矩陣稱為**隨機矩陣**(stochastic matrix)、**機率矩陣** (probability matrix) 或**馬可夫矩陣**(Markov matrix)。由上述的討論可知馬可夫鏈的轉移矩陣必是隨機矩陣。

在馬可夫鏈中，於任意觀察時間，系統之狀態通常無法很確定地決定出來，但通常最佳的方式是明示每一種可能狀態會發生的機率。例如，對具有三種狀態的馬可夫鏈，描述於某觀察時間系統的可能狀態，一般而言其定義如下，可用行向量

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

表示，其中 x_1 是系統處於狀態1 的機率，x_2 是系統處於狀態 2 的機率，x_3 是系統處於狀態3 的機率。

定義：在具有 k 種狀態的馬可夫鏈中，某觀察時間的**狀態向量**(state vector) 是一行向量$\mathbf{x}$，且$\mathbf{x}$ 的第 i 分量 x_i 爲該系統當時處於第 i 狀態的機率。

由觀察發現馬可夫鏈的任一狀態向量中的元素都不爲負值，且其和爲 1（何故？）。具有此性質的行向量稱爲**機率向量**(probability vector)。

現在假設已知一馬可夫鏈於某初始觀察時間的狀態向量$\mathbf{x}^{(0)}$，則依據下列定理，可以定出在後繼觀察時間的狀態向量 $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \cdots, \mathbf{x}^{(n)}, \cdots$。

定理 11.6.1：假若P 為馬可夫鏈的轉移矩陣且$\mathbf{x}^{(n)}$ 是於第 n 觀察時刻的狀態向量，則$\mathbf{x}^{(n+1)} = P\mathbf{x}^{(n)}$。

此定理的證明將使用到機率理論，此處予以省略。依定理 11.6.1 可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= P\mathbf{x}^{(0)} \\
\mathbf{x}^{(2)} &= P\mathbf{x}^{(1)} = P^2\mathbf{x}^{(0)} \\
\mathbf{x}^{(3)} &= P\mathbf{x}^{(2)} = P^3\mathbf{x}^{(0)} \\
&\vdots \\
\mathbf{x}^{(n)} &= P\mathbf{x}^{(n-1)} = P^n\mathbf{x}^{(0)}
\end{aligned}$$

依此方式，任意的$\mathbf{x}^{(n)}$ 皆可利用初始狀態向量$\mathbf{x}^{(0)}$ 與轉移矩陣 P 求得，其中 $n = 1, 2, \cdots$。

例題 2（續前）

例題 2 中的轉移矩陣爲

$$P = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix}$$

現在欲建構畢業後第一年不作捐贈的應屆畢業生未來可能有的捐贈記錄。對此類畢業生，系統開始時當然是在狀態 2，因此其初始狀態向量爲

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

依據定理 11.6.1，可得

$$\mathbf{x}^{(1)} = P\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3 \\ .7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = P\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .3 \\ .7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .45 \\ .55 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = P\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .45 \\ .55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .525 \\ .475 \end{bmatrix}$$

因此，三年後該屆畢業生（校友）會捐贈的機率爲 0.525。超過三年的狀態向量如下所示（計算至小數第三位）：

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} .563 \\ .438 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} .581 \\ .419 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} .591 \\ .409 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(7)} = \begin{bmatrix} .595 \\ .405 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(8)} = \begin{bmatrix} .598 \\ .402 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(9)} = \begin{bmatrix} .599 \\ .401 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(10)} = \begin{bmatrix} .599 \\ .401 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(11)} = \begin{bmatrix} .600 \\ .400 \end{bmatrix}$$

對所有 n 大於11 者，可得

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} .600 \\ .400 \end{bmatrix}$$

（計算至小數第三位）。易言之，隨著觀察次數的增加，該狀態向量將收斂至一固定向量（此點將在稍後再進行討論）。▲

例題 1（續前）

例題 1 中的轉移矩陣爲

$$\begin{bmatrix} .8 & .3 & .2 \\ .1 & .2 & .6 \\ .1 & .5 & .2 \end{bmatrix}$$

假若某輛轎車最初係由據點 2 租出，則其初始狀態向量爲

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

使用此向量及定理 11.6.1，可得表1 所列之後繼狀態向量。

表1

$x(n)$ \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_1^{(n)}$	0	.300	.400	.477	.511	.533	.544	.550	.553	.555	.556	557
$x_2^{(n)}$	1	.200	.370	.252	.261	.240	.238	.233	.232	.231	.230	230
$x_3^{(n)}$	0	.500	.230	.271	.228	.227	.219	.217	.215	.214	.214	213

對所有大於 11 的 n 值，其狀態向量皆等於$\mathbf{x}^{(11)}$（算至小數第三位）。

由此例中讀者應能發現兩件事。第一，不須知曉顧客租用轎車的時間長短，亦即，馬可夫過程中兩觀察時刻間之時間週期並不需要固定的。第二，隨著 n 值的增大，狀態向量將趨近某固定向量，恰如前例所示。▲

例題 3

某交通警察的任務是維持圖中八處十字路口的交通秩序，如圖 1 所示。依據規定，她受命必須在一處十字路口停留一小時後始能決定是否再度在該十字路口執勤或者換到鄰近的十字路口。為了避免建立固定模式，上司吩咐該警察選擇新的執勤位置時應在隨機基礎上，使每一可能的選擇機率都相等。例如，假若她是在十字路口 5 執勤，則她下一個執勤位置將是 2, 4, 5 及 8 中的一個，且每個機率都是 1/4。另外並假設該警察每天開始執勤時所站的位置是前一天勤務執行完畢時所站的位置。

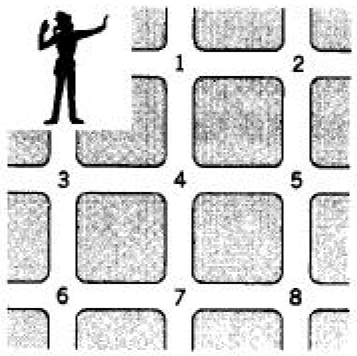

圖 1

此一馬可夫鏈的轉移矩陣為

原位置

$$
\begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} & \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}
\end{array}\right] &
\begin{array}{ll} 1 & \\ 2 & \text{新} \\ 3 & \\ 4 & \text{位} \\ 5 & \\ 6 & \text{置} \\ 7 & \\ 8 & \end{array}
\end{array}
$$

若該交通警察開始執勤時所站的位置是十字路口 5，隨著時間 1 小時 1 小時地流逝，她的可能執勤位置可得自表 2 的狀態向量。對所有大於22 的 n 值，其狀態向量都等於 $\mathbf{x}^{(22)}$（計算至小數第三位）。故正如前兩個例題所示，隨著 n 值的增大，狀態向量將趨近於某固定向量。▲

表 2

$\mathbf{x}^{(n)}$ \ n	0	1	2	3	4	5	10	15	20	22
$x_1^{(n)}$	0	.000	.133	.116	.130	123	113	.109	.108	.107
$x_2^{(n)}$	0	.250	.146	.163	.140	138	115	.109	.108	.107
$x_3^{(n)}$	0	.000	.050	.039	.067	073	100	.106	.107	.107
$x_4^{(n)}$	0	.250	.113	.187	.162	178	178	.179	.179	.179
$x_5^{(n)}$	1	.250	.279	.190	.190	168	149	.144	.143	.143
$x_6^{(n)}$	0	.000	.000	.050	.056	074	099	.105	.107	.107
$x_7^{(n)}$	0	.000	.133	.104	.131	125	138	.141	.143	.143
$x_8^{(n)}$	0	.250	.146	.152	.124	121	108	.107	.107	.107

狀態向量的極限行為

在前面三個例子中已經觀察到隨著觀察次數的增加，其狀態向量漸漸趨近於某一固定向量。現在要詢問是否馬可夫鏈的狀態向量總是趨近某一固定向量。經由一個簡單的例題將說明此情況並不一定會成立。

例題 4

令

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

及

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因為 $P^2 = I$ 及$P^3 = P$，因此可得到

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(4)} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

及

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(6)} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

此系統在二狀態向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 間不定地振動，因此不趨近於任一固定向量。▲

然而，如果在轉移矩陣上加上一項溫和條件，則可證明將會趨近一固定極限狀態。下列的定義即描述此條件。

> **定義**：若存在一整數冪 m 使得 p^m 中的每一元素均爲正數，則轉移矩陣 P 是 **正則的** (regular)。

於是，對一個正則轉移矩陣 P，存在有某一整數 m 使得 p^m 中的每一元素均爲正數。例題 1 及 2 中的轉移矩陣即是 $m = 1$ 時的情況。例題 3 中 P^3 的每一個元素均爲正數。因此，例題 1, 2, 3 中的轉移矩陣是正則的。

受正則轉移矩陣支配的馬可夫鏈，稱爲**正則馬可夫鏈**(regular Markov chain)。稍後將看到每一正則馬可夫鏈有一固定狀態向量$\mathbf{q}$，使得對任意選取的 $\mathbf{x}^{(0)}$ 當 n 增大時，$P^n\mathbf{x}^{(0)}$ 將趨近於$\mathbf{q}$。這是馬可夫鏈理論中最重要的結果。

> **定理 11.6.2**：若 P 為一正則轉移矩陣，則當 $n \to \infty$ 時，
>
> $$P^n \to \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$
>
> 其中 q_i 是使得 $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$ 的正數。

此處省略此定理的證明，（有興趣的讀者，可參考 J. Kemeng 及 J. Snell 所著的 *Finite Markov Chains*, New York; Springer-verlag, 1976.）

若設定

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \quad \text{而} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

則 Q 是一轉移矩陣，而Q 中的每一行都等於機率向量$\mathbf{q}$。Q 具有下列性質：假若 $\mathbf{x}$ 爲任意機率向量，則

$$\begin{aligned} Q\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1x_1 + q_1x_2 + \cdots + q_1x_k \\ q_2x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_2x_k \\ \vdots \\ q_kx_1 + q_kx_2 + \cdots + q_kx_k \end{bmatrix} \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = (1)\mathbf{q}=\mathbf{q} \end{aligned}$$

亦即，Q 可將任意機率向量$\mathbf{x}$ 變換爲固定機率向量$\mathbf{q}$。因此可得到下面的定理。

> **定理 11.6.3**：若 P 為正則轉移矩陣而 $\mathbf{x}$為任意機率向量，則當 $n \to \infty$ 時，
>
> $$P^n\mathbf{x} \to \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$
>
> 此處 $\mathbf{q}$ 是與 n 無關的某固定機率向量，而 $\mathbf{q}$ 的每一元素都是正數。

由於定理 11.6.2 指出當 $n \to \infty$ 時，$P^n \to Q$ 所以這項結論是成立的。這蘊涵當 $n \to \infty$ 時，$P^n\mathbf{x} \to Q\mathbf{x} = \mathbf{q}$。於是，對一正則馬可夫鏈，該系統始終趨近於一固定狀態向量 $\mathbf{q}$。向量 $\mathbf{q}$ 即稱爲正則馬可夫鏈的**穩定狀態向量**(steady-state vector)。

對具有許多狀態的系統而言，通常計算穩定狀態向量 $\mathbf{q}$ 最有效率的方法是對某一大的 n 值去計算 $P^n\mathbf{x}$。下面三個例題即是說明此程序。由於三個例題中都是正則馬可夫鏈，因此收斂於一穩定狀態向量是可確定的。另一種計算穩定狀態向量的方法是利用下列定理：

> **定理 11.6.4**：某正則轉移矩陣 P 的穩定狀態向量 $\mathbf{q}$乃是滿足方程式 $P\mathbf{q}=\mathbf{q}$ 的唯一機率向量。

爲了說明此定理，考慮恆等式 $PP^n = P^{n+1}$。依據定理 11.6.2，當 $n \to \infty$ 時，P^n 與 P^{n+1} 皆趨近於 Q。因此，可得 $PQ = Q$。此矩陣方程式的任意一行皆可由 $P\mathbf{q}=\mathbf{q}$ 求得。爲了證明 $\mathbf{q}$ 是滿足 $P\mathbf{q}=\mathbf{q}$ 的唯一機率向量，假設 $\mathbf{r}$ 是使得$P\mathbf{r} = \mathbf{r}$ 的另一機率向量，因此對 $n = 1, 2, \cdots$ 而言，$P^n\mathbf{r}=\mathbf{r}$ 亦成立，令 $n \to \infty$，則由定理 11.6.3 可導得 $\mathbf{q}=\mathbf{r}$。

定理 11.6.4 亦可表示成：齊次線性方程式組

$$(I-P)\mathbf{q}=0$$

有唯一的向量解 $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}$ 中的元素都不為負數並使得 $q_1+q_2+\cdots+q_k=1$。下面三個例題中，可應用此技巧於穩定狀態向量的計算上。

例題 2（續前）

例題 2 中的轉移矩陣為

$$P=\begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix}$$

因此線性方程式組 $(I-P)\mathbf{q}=\mathbf{0}$ 即是

$$\begin{bmatrix} .2 & -.3 \\ -.2 & .3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

展開此方程組可得單一獨立方程式

$$.2q_1-.3q_2=0$$

或移項後可得

$$q_1=1.5q_2$$

因此，假若令 $q_2=s$，則 (2) 式的一般解可表為

$$\mathbf{q}=s\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

此處 s 為任意常數。為了使得 $\mathbf{q}$ 成為一機率向量，我們令 $s=1/(1.5+1)=.4$，因此

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} .6 \\ .4 \end{bmatrix}$$

即為本題之正則馬可夫鏈的穩定狀態向量。此意謂經過一段長時間後，校友中有 60% 每年將捐款給校友聯誼基金，其他 40% 將不作捐獻。因而發現此處的 $\mathbf{q}$ 與例題 2 的計算結果完全相同。▲

例題 1（續前）

例題 1 中的轉移矩陣為

$$P=\begin{bmatrix} .8 & .3 & .2 \\ .1 & .2 & .6 \\ .1 & .5 & .2 \end{bmatrix}$$

因此線性方程式組 $(I-P)\mathbf{q}=\mathbf{0}$ 即是

$$\begin{bmatrix} .2 & -.3 & -.2 \\ -.1 & .8 & -.6 \\ -.1 & -.5 & .8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其係數矩陣的簡約列-梯型為（試驗證之）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{34}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故原方程組相當於方程式組

$$\begin{aligned} q_1 &= \left(\tfrac{34}{13}\right)q_3 \\ q_2 &= \left(\tfrac{14}{13}\right)q_3 \end{aligned}$$

令 $q_3=s$，則上述線性方程組的一般解為

$$\mathbf{q}=s\begin{bmatrix} \frac{34}{13} \\ \frac{14}{13} \\ 1 \end{bmatrix}$$

為了使得 $\mathbf{q}$ 成為一機率向量，我們令

$$s=\frac{1}{\frac{34}{13}+\frac{14}{13}+1}=\frac{13}{61}$$

因此，此系統的穩定狀態向量為

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} \frac{34}{61} \\ \frac{14}{61} \\ \frac{13}{61} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} .5573\cdots \\ .2295\cdots \\ .2131\cdots \end{bmatrix}$$

此與表 1 所得數值完全相同。$\mathbf{q}$ 中的三個元素分別表示轎車將返還至據點1, 2 及3 的長期機率。因此假若該轎車出租經紀人擁有 1,000 輛出租轎車，則他應該設計他的設備使得據點 1 至少擁有 558 個停車位，據點 2 至少擁有 230 個停車位及據點 3 至少擁有 214 個停車位。▲

例題 3（續前）

此處不打算列示所有計算步驟，僅單單說出線性方程式組 $(I-P)\mathbf{q}=\mathbf{0}$ 的唯一機率向量解為

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}\frac{3}{28}\\\frac{3}{28}\\\frac{3}{28}\\\frac{5}{28}\\\frac{4}{28}\\\frac{3}{28}\\\frac{4}{28}\\\frac{3}{28}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.1071\cdots\\.1071\cdots\\.1071\cdots\\.1785\cdots\\.1428\cdots\\.1071\cdots\\.1428\cdots\\.1071\cdots\end{bmatrix}$$

此向量的每一元素分別表示在經過一段長時間後，該交通警察在各個十字路口執勤的時間比例。因此，假若該警察的目標是在各個十字路口皆執勤相同比例的時間，則若執勤位置係依據相同機率隨機移動的策略顯然不是最佳的策略（參考習題 5）。▲

習題集 11.6

1. 就轉移矩陣 $P=\begin{bmatrix}.4 & .5\\.6 & .5\end{bmatrix}$
   (a) 試對 $n=1,2,3,4,5$, 計算 $\mathbf{x}^{(n)}$，假若 $\mathbf{x}^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
   (b) 試說明 P 何以是正則的，並求 P 的穩定狀態向量。
2. 考慮轉移矩陣

$$P=\begin{bmatrix}.2 & .1 & .7\\.6 & .4 & .2\\.2 & .5 & .1\end{bmatrix}$$

   (a) 試計算 $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, 及 $\mathbf{x}^{(3)}$ 至小數第三位，若

$$\mathbf{x}^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

   (b) 試說明 P 何以是正則的，並求出 P 的穩定狀態向量。
3. 試求下列各正則轉移矩陣的穩定狀態向量:

(a) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{3}{4}\\\frac{2}{3} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}.81 & .26\\.19 & .74\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0\\\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4}\\\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$

4. 設 P 爲轉移矩陣

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

   (a) 試證明 P 不是正則的。
   (b) 試證明隨著 n 的增大，對任意的初始狀態向量 $\mathbf{x}^{(0)}$, $P^n\mathbf{x}^{(0)}$ 將趨近於 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$。
   (c) 試說明定理 11.6.3 的那些結論對此轉移矩陣的穩定狀態向量是無效的。
5. 試證明: 假若 P 爲一 $k\times k$ 階正則轉移矩陣，且 P 中每一行的元素和都等於 1，則 P 之穩定狀態向量的每一元素值都等於 $1/k$。
6. 試證明轉移矩陣

$$P=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

   是正則的，並使用習題 5 求 P 的穩定狀態向量。
7. 老王擁有兩種情緒狀態: 快樂或悲傷。假若某一天他處於快樂狀態，則隔天仍舊處於快樂狀態的機率爲 4/5; 但若處於悲傷狀態，則隔天仍處於悲傷狀態的機率爲 1/3; 試問經過一段長時間後，在某一天遇到老王時，他正處於快樂的機率爲何?
8. 某一國家將領土劃分成三個行政區域，根據統計資料，每年區域 1 的居民有 5% 遷徙至區域 2，亦有 5% 遷徙至區域 3，區域 2 的居民有 15% 遷徙至區域 1，有 10% 遷徙至區域 3; 區域 3 的居民有10% 遷徙至區域 1，有 5% 遷徙至區域 2。試問經過一段長時間後，三區域的人口百分比將各爲何?