矩陣的應用

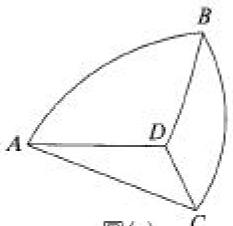
下面我們就矩陣在網路與機率的應用，作個簡要的介紹。

1. 矩陣在網路（或圖論）上的應用

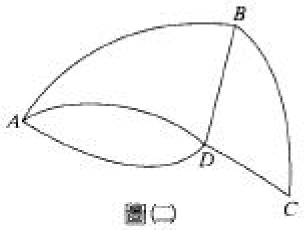
拓撲學是數學中一個重要的分支，它研究圖形在拓撲變換下不變的性質，而拓撲變換所指的是一種既不撕破，也不捏合，但允許將圖形任意伸縮與彎曲（扭曲）的變換，也就是可扭曲和拉長，但不切開與接合，不摺疊不黏貼的變換。因此，拓撲學有時被稱為橡膠膜幾何學。它的主要內容是討論點、線與它們所構成的圖形。

網路是學習拓撲的一個重要過程，而所謂網路是一種由有限條曲線段（包括直線段）所組成的圖，其中每條曲線都有兩個相異端點（稱為頂點）。例如：一個城市的街道圖，巴士路線圖，或飛機航線圖都是網路。網路可以任意扭曲，所以它沒有固定的形狀。因此，利用坐標或方程式來表示是沒有意義的。而利用矩陣可以將網路中，點與點的關係或點與弧的關係表示出來（這裡所指的弧是網路上的曲線段），並利用矩陣代數進一步的分析說明它們的結構。

下面圖㈠，圖㈡表示 A，B，C，D 四個城市間的飛航網路。



圖㈠



圖㈡

我們用下面的表格將它們表示出來

由＼至	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	1
C	1	1	0	1
D	1	1	1	0

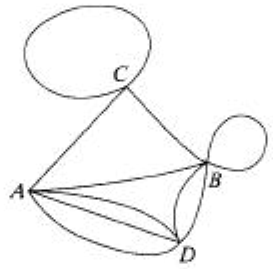
表㈠

由＼至	A	B	C	D
A	0	1	0	2
B	1	0	1	1
C	0	1	0	1
D	2	1	1	0

表㈡

表㈠，表㈡分別由圖㈠，圖㈡的網路圖得到，在表㈠中與表㈡中，如果由 P 城市到 Q 城市沒有班機就在列與行的相關位置填上 0，有一路班機就填上 1，有兩路班機就填上 2。

在網路中，也可能有由 P 繞回 P 不路過其他頂點路線，如下圖㈢及表㈢的對應關係。



圖㈢

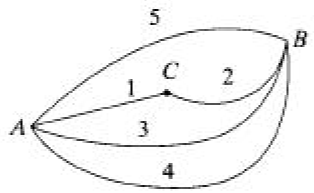
由＼至	A	B	C	D
A	0	1	1	3
B	1	1	1	2
C	1	1	1	0
D	3	2	0	0

表㈢

上面的表㈠，表㈡，表㈢，可以直接簡化分別以矩陣 M_1，M_2，M_3 表示。

$$M_1=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\2&1&1&0\end{pmatrix},\quad M_3=\begin{pmatrix}0&1&1&3\\1&1&1&2\\1&1&1&0\\3&2&0&0\end{pmatrix}.$$

除了上面表示點與點之間的關係的網路矩陣外，也可以用矩陣表示結點與弧的關係，我們稱為附隨矩陣，如圖㈣與表㈣，與矩陣 M_4。



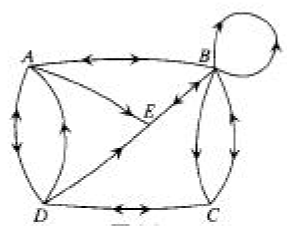
圖㈣

結點＼弧	1	2	3	4	5
A	1	0	1	1	1
B	0	1	1	1	1
C	1	1	0	0	0

表㈣

$$M_4=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

路線矩陣也可以表示「有向道」的特質，如圖㈤及矩陣 M_5。



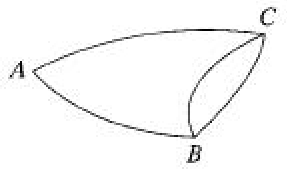
圖㈤

$$M_5=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\1&2&2&0&1\\0&1&0&1&0\\2&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

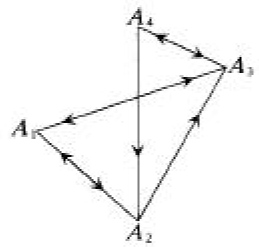
設 $M=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}$ 表示 A, B, C 三個地下鐵車站的網路，兩站間的地下鐵路線的個數，那麼

$$M^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&5&1\\2&1&5\end{pmatrix},$$

表示兩站之間兩段路線的數量，這個概念可從下圖㈥的網路圖說明：



圖㈥



圖㈦

同樣地，M_7 表示圖㈦中 A_1，A_2，A_3，A_4 四個城市之間的航運有向路線時，$M_7^{\,2}$，$M_7^{\,3}$ 就分別表示 A_1，A_2，A_3，A_4 四城市中，兩城市之間的兩段與三段有向路線的數量。

$$M_7=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix},\quad M_7^{\,2}=\begin{pmatrix}2&0&1&1\\1&1&1&1\\0&2&2&0\\2&0&1&1\end{pmatrix},\quad M_7^{\,3}=\begin{pmatrix}1&3&3&1\\2&2&3&1\\4&0&2&2\\1&3&3&1\end{pmatrix}.$$

在 $M_7^{\,3}$ 中，由 A_3 到 A_4 間的有向三段路線有兩條，即

$$A_3\to A_1\to A_3\to A_4 \text{ 與 } A_3\to A_4\to A_3\to A_4,$$

而 $M_7^{\,3}$ 中，由 A_4 到 A_3 的三段有向路線有三條。

2. 方陣在機率問題的應用

描述由一狀態轉移至另一狀態的系統的一般模型，可用矩陣表示。當一隨機試驗可能有很多種結果（或稱狀態）出現，而每次試驗的結果發生的機率完全取決於前一次試驗的結果，這個過程稱爲馬可夫過程。一序列如此連續試驗稱爲馬可夫鏈。馬可夫鏈（Markov chain）的基本觀念，最早在 1907 年由蘇俄數學家馬可夫（A.A. Markov）所提出的。

在說明馬可夫鏈意義之前，讓我們先觀察一個例子。

假設某地有甲、乙、丙三種報紙，目前訂閱甲報的人數占訂戶總人數的 20%，訂閱乙報的人數占 30%，訂閱丙報的人數占 50%。

假定市場調查的結果告訴我們：

⑴目前訂閱甲報的人，有 80%明年會繼續訂閱甲報，有 10%會改訂乙報，有 10%會改訂丙報。

⑵目前訂閱乙報的人，有 20%明年會改訂甲報，有 70%會繼續訂閱乙報，有 10%會改訂丙報。

⑶目前訂閱丙報的人，有 10%明年會改訂甲報，有 30%會改訂乙報，有 60%會繼續訂丙報。

如果明年的訂戶總人數不變，

⑴我們有什麼方法可以預測明年訂閱甲報、乙報、丙報的人數分別占訂戶總人數的百分比嗎？

⑵假設訂報意願之改變在每一個觀察期皆相同時，問當報業市場趨於穩定時，甲報、乙報、丙報的市場占有率分別爲何？

就這個問題而言，我們逐步來說明：

首先，由市場調查結果列表如下：

今年狀態 ＼ 明年狀態	甲	乙	丙
甲	$\frac{80}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{10}{100}$
乙	$\frac{10}{100}$	$\frac{70}{100}$	$\frac{30}{100}$
丙	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{60}{100}$

根據市場調查的結果，明年的甲報訂戶可以分成三類：目前甲報訂戶中的 80%，目前乙報訂戶中的 20%，以及目前丙報訂戶中的 10%，假設訂戶總人數是 s，因爲目前甲、乙、丙三報的市場占有率依次爲 20%、30%、50%，所以，明年訂閱甲報的人數預計有

$$\frac{80}{100}\left(\frac{20}{100}s\right)+\frac{20}{100}\left(\frac{30}{100}s\right)+\frac{10}{100}\left(\frac{50}{100}s\right)=\frac{27}{100}s\ \cdots\cdots①$$

同理，明年訂閱乙報的人數預計爲

$$\frac{10}{100}(\frac{20}{100}s)+\frac{70}{100}(\frac{30}{100}s)+\frac{30}{100}(\frac{50}{100}s)=\frac{38}{100}s \cdots\cdots ②$$

另一方面，明年訂閱丙報的人數預計爲

$$\frac{10}{100}(\frac{20}{100}s)+\frac{10}{100}(\frac{30}{100}s)+\frac{60}{100}(\frac{50}{100}s)=\frac{35}{100}s \cdots\cdots ③$$

現在將①，②，③以矩陣記之爲：

$$\begin{bmatrix} \frac{80}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{70}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{10}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{20}{100}s \\ \frac{30}{100}s \\ \frac{50}{100}s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{100}s \\ \frac{38}{100}s \\ \frac{35}{100}s \end{bmatrix},$$

亦即

$$\begin{bmatrix} \frac{80}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{70}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{10}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{20}{100} \\ \frac{30}{100} \\ \frac{50}{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{100} \\ \frac{38}{100} \\ \frac{35}{100} \end{bmatrix} \cdots\cdots ④$$

在上面這個矩陣乘積的等式中，左邊的 3×1 矩陣中各元乃甲、乙、丙三報目前的市場占有率，右邊的 3×1 矩陣中各元乃是甲、乙、丙三報預測中明年的市場占有率；

左邊的 3×3 矩陣：$A=\begin{bmatrix} \frac{80}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{70}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{10}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}$，$A$ 稱爲推移矩陣。

A 中各元乃是有關訂戶意願所做的市場調查結果。若將甲、乙、丙三報依次稱爲第 1 報、第 2 報、第 3 報。而 A 的 (i,j) 元是 p_{ij}，則目前訂閱第 j 報的人將有 p_{ij}，明年會訂閱第 i 報，或者說，目前訂閱第 j 報的人明年會訂閱第 i 報的機率爲 p_{ij}。假設訂報意願之改變在每一個觀察期皆相同時，

令 $P^{(k)}=\begin{bmatrix} p_1^{(k)} \\ p_2^{(k)} \\ p_3^{(k)} \end{bmatrix}$ 表第 k 年的預計市場佔有率矩陣，則

$$P^{(1)}=AP^{(0)}=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.38 \\ 0.35 \end{bmatrix},$$

$$P^{(2)}=AP^{(1)}=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.38 \\ 0.35 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.327 \\ 0.398 \\ 0.275 \end{bmatrix},$$

$$P^{(3)}=AP^{(2)}=\begin{bmatrix} 0.3687 \\ 0.3938 \\ 0.2375 \end{bmatrix},$$

$$P^{(4)}=AP^{(3)}=\begin{bmatrix} 0.39747 \\ 0.38378 \\ 0.21875 \end{bmatrix},$$

$$P^{(5)}=AP^{(4)}=\begin{bmatrix} 0.416607 \\ 0.374018 \\ 0.209375 \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

依此，我們發現 $p_1^{(k)}$，$p_2^{(k)}$，$p_3^{(k)}$ 隨著 k 的增加，其值也穩定地接近一極限值。第 k 年的預計市場佔有率矩陣

$$P^{(k)}=AP^{(k-1)}=A^2P^{(k-2)}=\cdots=A^kP^{(0)},$$

且我們可進一步推得

$$\lim_{k\to\infty}P^{(k)}=\begin{bmatrix} \frac{9}{20} \\ \frac{7}{20} \\ \frac{4}{20} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 45\% \\ 35\% \\ 20\% \end{bmatrix}，$$ 其中 $\lim_{k\to\infty}P^{(k)}$ 表示 $\begin{bmatrix} \lim_{k\to\infty} p_1^{k} \\ \lim_{k\to\infty} p_2^{k} \\ \lim_{k\to\infty} p_3^{k} \end{bmatrix}$。

由此可知，當報業市場趨於穩定時，甲報、乙報、丙報的市場占有率分別爲45%、35%、20%。事實上，不論最初的市場占有率矩陣 $P^{(0)}$ 爲何，都可以達到這種穩定狀態。

下面我們說明馬可夫鏈的意義及性質：

在社會現象與自然現象中，許多現象都會隨時間的改變而呈現不同的狀態（結果）。

假設某現象所可能呈現的不同狀態只有有限多種：S_1，S_2，…，S_n，我們每隔一段固定的時間來觀察它所呈現的狀態。如果此現象在各觀察期呈現某種狀態的過程滿足下面這個性質：在任意觀察期中此現象呈現狀態 S_j 時，則它在下一觀察期呈現狀態 S_i 的機率爲 p_{ij}，當一個現象的呈現過程具有這個性質時，我們就說這個過程形成一個馬可夫鏈。設有一個馬可夫鏈，其可能出現的不同狀態有 S_1，S_2，…，S_n，而由狀態 S_j 轉變成狀態 S_i 的機率爲 p_{ij}，依定義列表如下：

現在狀態（k 次）／下一觀察期狀態（$k+1$ 次）	S_1	S_2	⋯	S_n
S_1	p_{11}	p_{12}	⋯	p_{1n}
S_2	p_{21}	p_{22}	⋯	p_{2n}
S_3	p_{31}	p_{32}	⋯	p_{3n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
S_n	p_{n1}	p_{n2}	⋯	p_{nn}

令 $A=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$，矩陣 A 稱爲這個馬可夫鏈的推移矩陣。

在推移矩陣 A 中，每個元 p_{ij} 都是大於或等於 0 的數；

而且每一行中各元的和都等於 1，亦即，

$$p_{1j}+p_{2j}+\cdots+p_{nj}=1,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

這是因爲當這個馬可夫鏈在某一觀察期中呈現狀態 S_j 時，在下一個觀察期中必定呈現 S_1，S_2，…，S_n 中之一，所以對應的機率 p_{1j}，p_{2j}，…，p_{nj} 的和爲 1。

定義(一)：若一個方陣的各元都大於或等於 0，而且每一行中各元的和都等於 1，此種方陣稱爲馬可夫矩陣或隨機矩陣。

例如，下面兩個矩陣都是馬可夫矩陣：

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

定義(二)：設在第 k 次試驗時出現狀態 S_i 之機率爲 $p_i^{(k)}$，則稱 $n\times 1$ 矩陣。

$P^{(k)}=\begin{bmatrix} p_1^{(k)} \\ p_2^{(k)} \\ \vdots \\ p_n^{(k)} \end{bmatrix}$ 爲第 k 次狀態矩陣或稱爲第 k 次狀態機率向量，而 $P^{(0)}$ 稱爲原始狀態矩陣。

定義(三)：若狀態矩陣序列 $\langle P^{(k)} \rangle$ 之極限存在，且 $\lim\limits_{k\to\infty} P^{(k)}=P$，則稱 P 爲此馬可夫鏈之穩定狀態矩陣。

定義(四)：設 A 爲一推移矩陣，若存在自然數 k 使 A^k 之各元素均爲正數，則稱 A 是正則馬可夫矩陣。

馬可夫矩陣與馬可夫鏈有幾個重要性質，下面我們逐一說明：

性質(一)：設 A 與 B 爲同階馬可夫矩陣，則 AB 也是馬可夫矩陣。

證　明：設 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，　$B=[b_{ij}]_{n\times n}$，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}=1,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \ \forall i,\ j,\ a_{ij}\ge 0 \text{ 且 } b_{ij}\ge 0.$$

令 $AB=[c_{ij}]$，則

因爲 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\ge 0$，

所以對每個 $j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}&=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj})\\&=(\sum_{i=1}^{n}a_{i1})b_{1j}+(\sum_{i=1}^{n}a_{i2})b_{2j}+\cdots+(\sum_{i=1}^{n}a_{in})b_{nj}\\&=b_{1j}+b_{2j}+\cdots+b_{nj}\\&=1,\end{aligned}$$

因此，依馬可夫矩陣定義知，AB 也是馬可夫矩陣。

性質(二)：若矩陣 A 爲一馬可夫鏈的推移矩陣，P 爲穩定狀態矩陣，則 $AP=P$。

證　明：$P=\lim\limits_{k\to\infty}P^{(k)}=\lim\limits_{k\to\infty}A^{k}\cdot P^{(0)}=\lim\limits_{k\to\infty}A(A^{k-1}\cdot P^{(0)})=\lim\limits_{k\to\infty}A\cdot P^{(k-1)}=AP$。

性質(三)：若矩陣 A 爲一馬可夫鏈的推移矩陣，其中 P 爲 A 的穩定狀態矩陣，Q 爲任一狀態矩陣，則 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{k}Q=P$。

證　明：因爲 Q 爲 A 的狀態矩陣，則 $h\in N$，$Q=A^{h}P^{(0)}$ 爲原始狀態矩陣。

$$\begin{aligned}\text{則 }\lim_{k\to\infty}A^{k}Q&=\lim_{k\to\infty}A^{k+h}P^{(0)}\\&=\lim_{k\to\infty}P^{k+h}\\&=P.\end{aligned}$$

性質(四)：若 A 爲正則馬可夫矩陣，則存在唯一穩定狀態矩陣 P 使 $AP=P$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{k}$ 各行正好是穩定狀態矩陣 P。

此性質涉及較深理論，在此不證明。本性質告訴我們恰存在唯一矩陣 $AP=P$，這表示了穩定狀態矩陣恰爲固有值 1 所對應的固有向量，而此固有向量各元素和當然是 1 了！因此想要求得一個推移矩陣 A 的穩定狀態機率矩陣，通常有兩個方法可循：一個是求推移矩陣對應於 1 的單位固有向量，當然其各元素應不爲負了；另一個是求 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{k}$ 的任一行矩陣即可。

不爲穩定狀態的馬可夫矩陣

不是每一種馬可夫鏈都有穩定狀態，關鍵在於推移矩陣 A^{k} 的極限是否存在，例如下面這個馬可夫矩陣：

$$B=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

滿足 $B^{3}=I_3$，故得

$$B=B^{4}=B^{7}=B^{10}=\cdots=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

$$B^{2}=B^{5}=B^{8}=B^{11}=\cdots=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},$$

$$B^{3}=B^{6}=B^{9}=B^{12}=\cdots=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

假設

$$P^{(0)}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix},$$

而 $P^{(k)}=B^kP^{(0)}$，則得

$$P^{(1)}=P^{(4)}=P^{(7)}=P^{(10)}=\cdots=\begin{bmatrix}c\\a\\b\end{bmatrix},$$

$$P^{(2)}=P^{(5)}=P^{(8)}=P^{(11)}=\cdots=\begin{bmatrix}b\\c\\a\end{bmatrix},$$

$$P^{(3)}=P^{(6)}=P^{(9)}=P^{(12)}=\cdots=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}.$$

如果 a , b , c 三個數中至少有兩個不相等，那麼，下面三個數列都沒有極限：

$<P_1^{(k)}>=<a,\ c,\ b,\ a,\ c,\ b,\ \cdots>,$

$<P_2^{(k)}>=<b,\ a,\ c,\ b,\ a,\ c,\ \cdots>,$

$<P_3^{(k)}>=<c,\ b,\ a,\ c,\ b,\ a,\ \cdots>,$

最後，再舉一個例子，說明可達到穩定狀態的馬可夫鏈，並求其穩定狀態矩陣。某大學校友會統計校友捐款記錄，得到一資料：

捐款給母校的校友中，有 80%的人在下一年度也會繼續捐款，沒有捐款的校友有 30%的人，在下一年度會捐款給母校，這個捐款現象，可視爲兩種狀態的馬可夫鏈，其推移矩陣

$$M=\begin{bmatrix}0.8&0.3\\0.2&0.7\end{bmatrix}.$$

如果我們假設應屆畢業生第一年不捐款，欲建構畢業生將來可能的捐款情況。令初始狀態向量爲 $P^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，那麼，若 $P^{(k)}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}$ 表示畢業生第 k 年捐款的機率爲 p_1，不捐款的機率爲 p_2，則

$$P^{(1)}=MP^{(0)}=\begin{bmatrix}0.8&0.3\\0.2&0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3\\0.7\end{bmatrix},$$

$$P^{(2)}=MP^{(1)}=\begin{bmatrix}0.45\\0.55\end{bmatrix},$$

$$P^{(3)}=MP^{(2)}=\begin{bmatrix}0.525\\0.475\end{bmatrix},$$

這個結果表示，該校畢業生三年之後，捐款給母校的機率已超過 0.5，我們不難推算

$$P^{(4)}=\begin{bmatrix}0.563\\0.438\end{bmatrix},\quad P^{(5)}=\begin{bmatrix}0.581\\0.419\end{bmatrix},\quad P^{(6)}=\begin{bmatrix}0.591\\0.409\end{bmatrix},$$

$$P^{(7)}=\begin{bmatrix}0.595\\0.405\end{bmatrix},\quad P^{(8)}=\begin{bmatrix}0.598\\0.402\end{bmatrix},\quad P^{(9)}=\begin{bmatrix}0.599\\0.401\end{bmatrix},$$

$$P^{(10)}=\begin{bmatrix}0.599\\0.401\end{bmatrix},\quad P^{(11)}=\begin{bmatrix}0.600\\0.400\end{bmatrix},\quad P^{(12)}=\begin{bmatrix}0.600\\0.400\end{bmatrix},$$

對大於 11 的 n，可知 $P^{(n)}=\begin{bmatrix}0.600\\0.400\end{bmatrix}$，其中 $P^{(k)}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，$x$，$y$ 各取三位小數近似值，也就是此捐款現象，趨於穩定狀態，且穩定狀態矩陣爲 $\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}$。

我們利用性質㈡來推算穩定狀態的矩陣：

設 $P=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 爲穩定狀態矩陣（即穩定向量），則 $MP=P$。

由 $MP=P$ 可得 $(M-I)P=0$，即 $\begin{bmatrix}-0.2&0.3\\0.2&-0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$,

即 $\begin{cases}-0.2x+0.3y=0\\x+y=1\end{cases}$，可得 $x=0.6$，$y=0.4$,

所以，穩定狀態矩陣（即穩定向量）爲 $\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}$（這個結果與直接推算的結果有吻合）。

3. 利用餘因子（cofactor）求反方陣

在乙、方陣的行列式中，我們知道，n 階方陣 A 的轉置矩陣 A' 的行列式值與 A 的行列式值相等，且 $|A|$ 表示方陣 A 的行列式時，

(1) $|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$，$i$ 爲 1 到 n 中的任意一個整數,

(2) $|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$，$j$ 爲 1 到 n 中的任意一個整數,

其中A_{ij}表示將方陣A中的第i列與第j行的所有數都刪除後，所得到的$n-1$階方陣，我們稱$(-1)^{i+j}|A_{ij}|$爲元素a_{ij}的餘因子，並以C_{ij}記之，那麼上式(1)與(2)可表示爲

(1)′ $|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$，

(2)′ $|A|=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$，

另一方面，我們知道方陣A可逆（即有乘法反元素）的充要條件爲$|A|\neq 0$，現在我們來說明如何利用餘因子求A的反方陣A^{-1}的方法。

由行式的性質，我們易知：

(3)若$j\neq k$，則$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ik}=0$，

(4)若$i\neq k$，則$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{kj}=0$，

因此，當方陣$C_t=[C_{kj}]^t_{n\times n}$時，

$$AC=[a_{ik}][C_{kj}]^t=[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{jk}]=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=|A|I_n,$$

即$A(\frac{1}{|A|}C)=I_n$，所以$A^{-1}=\frac{1}{|A|}C$。

例如：$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$時，$|A|=1$，我們可以逐一求得下列的餘因子：

$C_{11}=0$，$C_{12}=-1$，$C_{13}=1$，

$C_{21}=1$，$C_{22}=3$，$C_{23}=-5$，

$C_{31}=-1$，$C_{32}=-4$，$C_{33}=7$，

因此，$C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & -4 & 7 \end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 7 \end{bmatrix}$，

所以$A^{-1}=\frac{1}{|A|}C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -5 & 7 \end{bmatrix}$。

4. 線性變換與鏡射、伸縮、推移變換的關係

本章教材中討論了平面上將點$P(x,y)$，由矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$乘積後變換成點$P'(x',y')$，此時$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，這種變換稱爲線性變換。由此可知旋轉$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，鏡射$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$，伸縮$\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$，與推移$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$都是線性變換。我們也可知這些幾何變換的合成也都是線性變換。反之，一個線性變換如何表示成這些幾何變換的合成呢？我們先以一個實例來說：

例：將$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$表示成幾何變換的合成。

首先我們可利用基本列運算將M化爲單位方陣，如下：

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上面的過程以矩陣積表示如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此，$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

即$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

此時，M就是由推移、伸縮、鏡射與推移等幾何變換的合成。

一般而言，任意二階可逆方陣（即非奇異線性變換）都可以表成推移、伸縮與鏡射的合成。下面來證明這個性質。

設A爲一個二階可逆方陣，則可由基本列運算將A化爲單位方陣I，我們將它以矩陣積表示，那麼存在基本列運算矩陣E_1，$E_2\cdots$，E_k使

$$E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A=I,$$

因此$A=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}I=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}$，

又每個基本列運算矩陣E_i，$i=1$，2，⋯，k的反矩陣也是基本列運算矩陣，而且$\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}$其中$h<0$可寫成鏡射與伸縮的合成之外，其餘的基本列運算矩陣都是推移、鏡射、伸縮中的一個幾何變換。因此，可確定任一二階可逆的方陣（即非奇異的線性變換）都可寫成推移、伸縮與鏡射等幾何變換的合成。