平方與平方根的速算演練

要計算一個尾數爲 5 的兩位數之平方是很容易的。只要將它的（首數）乘上（首數加 1）,然後把成得的結果補上 25 便行了。例如，求 45^2=?他的首數是 4，則 4×(4+1)=4×5=20。於是所求的平方數便是 2025。讀者可驗算一下（$75)^2$=5625，因爲 7×8=56,在 56 後面補上 25 就是 5625。

這方法的原理是：因爲任何一個以 5 爲尾數的兩位數都可以寫成 10a+5 的形式（a 爲某一整數，例如對 45 來說 a 等於 4）。那麼——

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$$

最後的式子正是前面所敘述的步驟。

從上述的證明中，我們得到另一啓示：假如有兩個兩位數相乘，而這兩個數的首位相同以及尾數之和等於 10 的話，我們亦可用上述的方法去求他們的積，但最後一步是補上這兩個數的尾位之積而不是補上 25。例如求 58×52=?首先 5×6=30 以及 8×2=16 則所求之積是 3016。(設兩數分別爲 10a+b , 10a+c ,且 b+c=10 。（10a+b）$(10a+c)=100a^2+10a(b+c)+bc$,因 b+c=10 ,故上式等於 $100a^2+100a+bc =100a(a+1)+bc$, 故得證。)

當然，對具有相同特性的兩個三位數也可用這方法去求。例如，我們很容易得到 146×144=21024,因爲 14×15=210 以及 6×4=24。

在這裡介紹對一些具有完全平方的四位數，求他們的平方根之速算方法。所謂具有完全平方的四位數是指一個四位數（例如 3249）他是某一整數的平方值（57 的平方就是 3249）。

首先，觀察一下由 1 至 9 的平方：

數目	平方
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	47
8	64
9	81

由上面可看出 1 和 9 的平方之尾位都是 1,2 和 8 的平方之尾位是 4,3 和 7 的平方之尾位是 9,4 和 6 的平方之尾是 6,5 的平方之尾位是 5。由此，便可得出速算的步驟。現以求 4624 的平方根爲例：

(1) 將這個四位數分爲兩組，兩位爲一組，即第一組是 46，第二組是 24。

(2) 先看看第二組 24，這數之尾位爲 4。所以，欲求的平方根之個位必是 2 或 8。

(3) 再看看第一組 46。想想那一個數的平方最接近而且少於 46 呢？當然是 6，因爲 $6^2=36$ 是最接近而少於 46 的。於是便知道所求的平方根之十爲數必是 6，即所求的平方根應是 62 或 68。

(4) 把已求出的平方根之十位數 6 乘上(6+1)。如果其積少於 46(即(1)中的第一組數)，則選擇(3)所得的大數。反之，取小的數。在這例中，$6\times(6+1)=6\times7=42$ 而 $42 < 46$ 故取 68(因 $68 > 62$)。

多舉一例，求$\sqrt{5329}$ = ？首先將這數分爲兩組：53 , 29。那麼，所求的平方根之個位是 3 或 7。然而，$7^2 = 49$ 是最接近而少於 53 的數，故此，所求的平方根應是 73 或 77。再由 $7\times8=56 >53$ 得知，應取小的數 73。故得$\sqrt{5329}=73$。

進一步考慮求一個五位或六位數的立方根（當然這個數是完全立方數）。我們會發現，求立方根比求平方根還簡單一些。因爲由 1 至 9 的立方是：

數目	立方
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729

這說明了 1,4,5,6,9 的立方之尾位都與立方前的數字相同（即亦分別是 1,4,5,6,9）。其他數目是：

2 的立方是 8,8 的立方之尾位是 2；

3 的立方之尾位是 7,7 的立方之尾位是 3。

這四個數的最大特點是，原數與他的立方之尾位的和都等於 10 （例如 2＋8=10, 3+7=10 ）。所以是很容易記憶的。

由此可得速算的步驟。現以求 314432 的立方根爲例:

(1) 將這六位數（或五位數）分成兩組，從右至左三位一組。即第一組是 314，第二組是 432。

(2) 以第二組的尾位來決定所求的立方根之個位。觀察現在第二組的尾位是，所以，欲求的立方根之個位必是 8（因爲 10-2=8）。

(3) 觀察第一組數，看看它夾在哪兩個立方數之間。取細的數作爲所求的立方根之首位便是。這例中，314 是夾在 216（即 6^3）與 343（即 7^3）之間，故取 6。於是便得到 $\sqrt[3]{314432}=68$。

出人意外，欲求一個小於一百億（10,000,000,000）的數之五次方根（當然，先決條件是這些數的五次方根是個整數，沒有小數的）並不比求平方根或立方根複雜，甚至可說更爲容易。因爲由 1 至 9 的五次方的個位數就是它本身。那麼欲求任何小於十萬的數（即一至五位數）之五次方根只要觀察該數的個位便是了。例如 $\sqrt[5]{16807}=7$（因爲這個五位數的個位是 7）。

我們只要記住以下的五個數字：1,3,24,100,300 便可計算出由十萬至三億的數之五次方根了（這些數的五次方根是在 10 至 50 之間）。但要注意的是，那五個數中，除第一個數的單位是十萬外，其餘的四位數均以百萬爲單位的（例：24 是代表 24 百萬，即二千四百萬）。記好了，欲求一個數如 $\sqrt[5]{6436343}=?$便易如反掌了。方法是，看看這個數落在上述的五個數中哪兩個數之間。很明顯，6436343 是個約 6 百萬的數，它落在第二個數 3（百萬）與第三個數 24（百萬）之間。於是我們便可肯定所求的五次方根之首位是 2（因爲該數是落在第二與第三個數之間，故取細數 2 便是）。因此可得 $\sqrt[5]{6436343}=23$。同理，我們很容易得到 $\sqrt[5]{60466176}=36$。因爲，這八位數落在第三個數 24（百萬）與第四個數 100（百萬）之間，故取 3 爲所求的五次方根之首數。

如果我們再多記著以下的五位數：773,1500,3000,6000,10000(它們都以百萬爲單位)，便可求得 1 至 1 百億的五次方根了。其方法和剛才所述的相同。我們很容易求得 $\sqrt[5]{8587340257}=97$，因爲該數是落在第九個數 6000(百萬)與第十個數 10000(百萬)之間。