例：下列數列是否收斂？若收斂，試求其極限值

1. $a_1=\sqrt{2}$， $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ (2)

2. $a_1=\sqrt{2}$， $a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$

3. $a_1=\sqrt{2}$， $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ (2)

4. $a_1=4$， $a_{n+1}=\sqrt{3a_n+10}$ (5)

5. $a_1=3$， $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$ (3)

6. $a_1=3$， $a_{n+1}=\sqrt{a_n+3}$ $(\frac{1+\sqrt{13}}{2})$

7. $a_1=4$， $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{4}{a_n})$ (2)

8. $\sqrt{3}$， $\sqrt{3\sqrt{3}}$， $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$， … (3)

9. $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dots}}}$ $(-1+\sqrt{2})$

10.

例：夾擊原理

1. $k\in N$， $\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{n^k}$ =? (0， $0<\frac{1}{n^k}<\dots<\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}$)

2. $k\in N$， $\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{k^n}$ =? (0)

3. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n}{2^n}$ =? (0， $n^2\le 2^n$)

4. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n}{5^n}$ =? (0， $n\le 2^n$)

5. $\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{n}$ =? (0， $\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$，

   $(1+\sqrt{\frac{2}{n}})^n\ge 1+n\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\frac{2}{n}}^2\ge 1+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\frac{2}{n}}^2=1+(n-1)=n$)

6. $a>0$， $\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{a}$ =? (1， pf:令 $x=\sqrt[n]{a}-1$ 且 $a\ge 1$， $a=(1+x)^n=$

$1+nx+\ldots$，故 $a>nx$，$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=x<\dfrac{a}{n}$，$\lim\limits_{n->\infty}\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=0$，$\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

再令 $0<a<1$ 時 $b=\dfrac{1}{a}$，再利用以上結果，即可得)

7. 設 $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(1) 證明：$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

(2) 證明：$2(\sqrt{n+1}-1)<a_n<2\sqrt{n}$

(3) 求 $\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ 之值

解：(1) $2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

故 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

(2) $2(\sqrt{1+1}-\sqrt{1})<\dfrac{1}{\sqrt{1}}<2(\sqrt{1}-\sqrt{1-1})$

$2(\sqrt{2+1}-\sqrt{2})<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-\sqrt{2-1})$

…

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

相加即得 $2(\sqrt{n+1}-1)<a_n<2\sqrt{n}$

(3)由(1)得 $2(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}})<\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}<2$

當 $n->\infty$，$2(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}})->2$

故 $\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=2$

8. $\lim\limits_{n->\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+n}})=?$　　($\sqrt{\dfrac{1}{2}}$，

$\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$)

9. $\lim_{n->\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}})=$？　　（2，

$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$）

10. $\lim_{n->\infty}(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2})=$？　　（0，

$\frac{n}{(n+n)^2}\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\le\frac{n}{(n+1)^2}$）

11. $\lim_{n->\infty}\frac{n!}{n^n}=$？　　（0，$0\le(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-2}{n})\le1$，$\frac{n!}{n^n}=$

$\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\ldots\times\frac{1}{n}=1\times(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-2}{n})\times\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}$）

12. **設**$n\in N$，**求**$\lim_{n->\infty}\frac{2^n}{n!}=$？　　（0，

$n!>1\times2\times3\times3\times3\times\ldots\times3=2\times3^{n-2}$，$0<\frac{2^n}{n!}<\frac{2^n}{2\times3^{n-2}}=2(\frac{2}{3})^{n-2}$）

13. **設數列**$a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\sqrt{3\times4}+\ldots+\sqrt{n\times(n+1)}$

(1) **試證：**$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}$

(2) **試求**$\lim_{n->\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}$　　（4）

14. 1

例：(是非題)

1. $<a_n>$**與**$<b_n>$**皆為發散，則**
   (1) $<a_n+b_n>$**必發散？**　(N)
   (2) $<a_n-b_n>$**必發散？**　(N)
   (3) $<a_n\times b_n>$**必發散？**　(N)
   (4) $<a_n\div b_n>$**必發散？**　(N)
2. $<a_n>$**與**$<b_n>$**皆為收斂，則**
   (1) $<a_n+b_n>$**必收斂？**　(Y)
   (2) $<a_n-b_n>$**必收斂？**　(Y)
   (3) $<a_n\times b_n>$**必收斂？**　(Y)
   (4) $<a_n\div b_n>$**必收斂？**　(N)
3. $<a_n>$**為發散，**$<b_n>$**為收斂，則**
   (1) $<a_n-b_n>$**必收斂？**　(N，**振動數列**)
   (2) $<a_n\times b_n>$**必收斂？**　(N，**振動數列**)
   (3) $<a_n\div b_n>$**必收斂？**　(N，**振動數列**)

(4) $<b_n - a_n>$**必收斂？** (N，**振動數列**)

(5) $<b_n \div a_n>$**必收斂？** (N，**振動數列**)

4. **下列何者為真？**

(1) **若**$<a_n>$**為遞增數列，則**$a_n \to \infty$ (**N，定值**)

(2) **若**$<a_n>$**為遞增數列，則**$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \to \infty$ (**Y**)

(3) **若**$<a_n>$**為遞減數列，則**$a_n \to -\infty$ (**N，定值**)

(4) **若**$<a_n>$**為遞減數列，則**$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \to -\infty$ (**Y**)

(5) **若**$|a_n| \to 0$，**則**$a_n \to 0$ (**Y**)

(6) **若**$<a_n + b_n>$**收斂，**$<a_n>$**與**$<b_n>$**皆為收斂** (N，$\pm n$)

(7) **若對於**$<a_n>$**任一項均有**$a_n \le a$，**則**$<a_n>$**必收斂** (N，**振動**)

(8) **若對於**$<a_n>$**任一項均有**$a_n < a$，**且**$<a_n>$**收斂，則必**$\lim_{n->\infty} a_n < a$ (N，=)

(9) **若**$<a_n>$**發散，則**$\lim_{n->\infty} a_n = \infty$ (N)

(10) **若對於**$<a_n>$**任連續項均有**$a_{n+1} \ge a_n > 0$，**則**$\lim_{n->\infty} a_n = \infty$ (N)

(11) **三數列**$<a_n>$、$<b_n>$**與**$<c_n>$，**若對於一切自然數**n，**均有**$a_n \le b_n \le c_n$，**且**$<a_n>$**及**$<c_n>$**均收斂，則**$<b_n>$**必收斂** (N，**振動**)

(12) **若**$<a_n>$、$<b_n>$**均為收斂數列，則**$\lim_{n->\infty} a_n = \lim_{n->\infty} b_n$

5. **試求下列各式之值**

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5^n}$ ($\frac{11}{16}$，S=…，rS=…，(1-r)S=…)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{3^n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ (6)

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{8^n}$ ($\frac{80}{49}$)

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{7^n}$ $(\frac{14}{9})$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\times 2^n+2^{n-1}}{3^{n-1}}$ (21)

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)\times(\frac{3}{4})^n$ (30)

6.