

第一章 最大、最小值問題與不等式

§ 1-1 用代數方法求最大、最小值問題

- 一、一次函數 $y = f(x) = ax + b, a \neq 0, x \in R$, 無最大或最小值, 但若 $x \in [\alpha, \beta]$, 則有最大或最小值
- 二、二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, 之最大或最小值可能發生於
① 頂點 ② 左、右邊界

例 1: 求 $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ 之最大與最小值 ($M = 2 + \sqrt{2}, N = 2 - \sqrt{2}$)

*** 練習 ***

1. 若 $ax^2 - ax + 2a - 10 < 0$ 之解為 $-3 < x < 4$, 試求 a 之值?
2. 若 $(a-2)x^2 - 4x + (a+1) = 0$ 有實根, 試求 a 之範圍?
3. 若 $3x^2 + (a-1)x + 3a + 2 = 0$ 之一根大於 3, 另一根小於 2, 求 a 之範圍?
4. 若 $(a+3)x^2 - 4ax + 2a - 1 = 0$ 有一根為正實數另一根為負實數, 試求 a 之範圍?
5. 設 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{2}$, 求 $x^2 + y^2 + z^2$ 之最大與最小值?
6. 試求 $y = x(1-x)$ 在 $[-1, 1]$ 區間上之最大與最小值?
7. 若 $|2x-1| \leq 3$, 求 $y = 2x^2 + 4x - 1$ 的最大與最小值?
8. 若 $x^2 - (a+12)x + a^2 + 45 = 0$ 有實根, 求 $a(a+4)$ 之最大與最小值?
9. 設 $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$, 求 $x+y$ 之最大與最小值?
10. 求 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 之最大與最小值?
11. 若 $y = x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 恆為正, 求 a 之範圍?
12. 若 a 為整數且 $y = x^2 + ax + a$ 恆大於 -3 求 a 之值?
13. 若 $y = |x^2 + 4| + 3x$, 求 y 之最大與最小值?
14. 若 $x > 1, y > 1$ 且 $2\log_x y - 2\log_y x + 3 = 0$, 求 $x^2 - 4y^2$ 之最小值?

§ 1-2 簡易絕對不等式

一、例 1: 設 a, b 為正數, 試證 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

例 2: 設 a, b, c 為正數, 試證 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$? 等號何時成立?

例 3: 設 a, b, c 為正數, 試證 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}$

*** 練習 ***

1. 設 a, b 皆大於 0, 則
 - (1) 求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的最小值? (2)
 - (2) 求 $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ 的最小值及此時之 a, b 值? (4, $a = b > 0$)
2. a, b 皆為正數, 試證: $(a+b)(a^3 + b^3) \geq (a^2 + b^2)^2$
3. a 為正數, 試求 $a + 1 + \frac{16}{a+2}$ 之最小值及此時之 a 值?
4. 試證: $a^2 + b^2 + (1-a-b)^2 \geq \frac{1}{3}$
5. 求 $y = |x-4| + |2x+1|$ 之最小值?
6. a, b 皆為正數, 且 $a+b=1$, 求 $(a + \frac{1}{a}) + (b + \frac{1}{b})$ 之最小值?
7. a, b, c 均為正數, 且 $abc=1$, 求 $(a+2)(b+2)(c+2)$ 之最小值? (27)
(提示: $\frac{a+2}{3} = \frac{a+1+1}{3} \geq \sqrt[3]{a}$)
8. a, b 皆為正數, 試證: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2$
9. a, b 皆為正數, n 為正整數, $n > 1$, 試證: $\frac{a^n + b^n}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^n$
10. a, b 皆為正數, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$, 試證: $\alpha a^n + \beta b^n \geq (\alpha a + \beta b)^n$

11. 若 $a > b > 0$ ，試證 $\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2+1}} > \frac{b}{a}$
12. 若 a, b 均為正數，試證 $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$
13. 若 $a > b > 0$ ，試證 $a^a b^b > a^b b^a$
14. 若 $a > 0, a \neq 1$ 且 $m > n > 0$ ，試證 $a^m + \frac{1}{a^m} > a^n + \frac{1}{a^n}$
15. 若 a, b, c 均為正數，試證 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$
16. 若 a, b, c 均為正數，試證 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$
17. 若 a, b, c 均為正數，試證 $(k+1)(a+b+c)\left(\frac{1}{a+kb} + \frac{1}{b+kc} + \frac{1}{c+ka}\right) \geq \frac{9}{2}$
18. 若 a, b, c 為三角形之三邊長，試證 $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{9}{a+b+c}$
19. 若 a, b, c 為三角形之三邊長，若 k 為自然數，試證
- $$k\left(\frac{1}{kb+c-a} + \frac{1}{kc+a-b} + \frac{1}{ka+b-c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$$

§ 1-3 算術平均數大於或等於幾何平均數

一、若 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 均為正數，則 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$

例 1: 設 m, n 為自然數, a, b 為正數, 試證 $\frac{ma + nb}{m + n} \geq \sqrt[m+n]{a^m b^n}$

例 2: 設 n 為自然數, 試證 $(\frac{n+1}{2})^n \geq n!$

*** 練習 ***

1. a, b, c 均為正數, 試證 $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$
2. 若 a, b, c 均為正數, 試證 $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$
3. 若 a, b, c 均為正數, 試證 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$
4. 設 n 為自然數, 試證 $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) \leq (n+1)^n$
5. 設 n 為自然數, 試證 $5^n \geq 1 + 4n\sqrt{5^{n-1}}$
(提示: $5^n - 1 = (5-1)(\dots)$)

§ 1-4 柯西不等式

一、柯西不等式:對於任意自然數 n ,

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

且兩端相等 \Leftrightarrow 有一常數 k 使得 $b_i = ka_i, i = 1, 2, \dots, n$

例 1: x 為正數, 試求 $(1+2+3+x)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right)$ 的最小值?

例 2: $a^2 + b^2 + c^2 = 5$, 則 a, b, c 為何值時, $a + b + c$ 有最大值, 又最大值為何

例 3: 試證 $6(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c)^2$

*** 練習 ***

1. a, b 均為正數, 試求 $(a + \frac{1}{b})(2b + \frac{1}{2a})$ 之最小值? ($\frac{9}{2}$)
2. 設 $a + b + c = 2$, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 之最小值?
3. 若 $a^2 + b^2 + c^2 = 14$, 則 $a - 2b + 3c$ 之最大值與最小值為何?
4. 若 a, b, c 均非負數, 且 $a + b + c = 8$, 求 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ 之最大值與最小值?
5. a, b, c 均為正數, 求 $(a + \frac{3}{b} + \frac{4}{c})(\frac{1}{a} + 3b + 4c)$ 之最小值?
6. 試證 $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq (\frac{a + b + c}{3})^2$

第二章 最大、最小值問題與不等式

§ 2-1 函數圖形的重要

§ 2-2 圖形的對稱、平移與伸縮

甲、對稱

- (1)對稱
- (2)對稱軸
- (3)對稱點
- (4)對稱中心

例:求作 $|x| + |y| = 1$ 的圖形

乙、平移

丙、伸縮

例 1 : 試繪 $|x + 3| + |y - 2| = 1$ 之圖形

例 2 : 試繪 $||x| - 1| + ||y| - 2| = 2$ 之圖形

例 3 : 利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出 $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ 的圖形

§ 2-3 三次函數的圖形

例 1：試繪 $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ 之圖形

例 2：試繪 $y = x^3 - 2x^2 - x - 3$ 之圖形

§ 2-4 絕對值函數的線性組合

例 1：試繪 $y = |x - 2| - 2|x + 2|$ 之圖形

例 2：試求 $y = |x| + |x - 6| + |x + 5| + |x - 2| + |x + 1| + |x - 3| + |x - 4|$ 之最小值

及此時之 x 與 y 值？