數列與級數

一、名詞：數列、遞增、遞減、單調、上界、下界、連分數、第 n 個漸近分數

二、單調數列

遞增而有上界數列必收斂於其上界

遞減而有下界數列必收斂於其下界

例1: 設 a_n 表數列 $<\dfrac{n}{2n+1}>$ 的第 n 項 $\dfrac{n}{2n+1}$ ，試求數列 $<a_n>$ 前後項的大小關係？

例2: 試證 $<\dfrac{n+1}{n}>$ 為遞減而有下界的數列，又其極限為何？

例3: 設 a_n 表半徑為 1 的圓內接正 2^n 邊形的面積，試求數列 $<a_n>$ 當 $n \geq 2$ 時前後項間之大小關係？又此數列與圓面積的關係為何？

例4: 設 a_n 表半徑為 1 的圓內接正 2^n 邊形的一邊與圓心所成三角形之面積，試以三角公式表示 a_n ？並探討 a_n 與 a_{n+1} 間之大小關係？(註：三國時魏人劉徵就是用這種原理求得 π 的近似值為 3.14159；南北朝的祖沖之更求得 π 的近似值介於 3.1415926 與 3.1415927 之間；而阿基米德則用內接及外切正多邊形周長來逼近圓周長的方法，求得 $\dfrac{223}{71} < \pi < \dfrac{22}{7}$)

例5: 設 $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ ，試證 $<a_n>$ 為遞增且有上界的數列？（註：$<a_n>$ 的極限是 $e = 2.718281828459025...$）

例6: 設 $a_n = 2 \times \dfrac{2\times 2}{1\times 3} \times \dfrac{4\times 4}{3\times 5} \times ..... \times \dfrac{2n\times 2n}{(2n-1)(2n+1)}$ ，試證 $<a_n>$ 為遞增且有上界的數列？（註：$<a_n>$ 的極限是 π ）

例7: 複利公式 $A_n = P(1+r)^n$ ，若本金 $P=1$，利率 $r=\dfrac{1}{n}$ ，則 $A_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$ 也是有上界，其上界極限值為 e

三、連分數(祖沖之用之)

$\dfrac{5}{3} = 1 + \dfrac{2}{3} = 1 + \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$ ，我們用 $r_3 = <1,1,2>$ 來表示連分數的第 3 個漸近分數，亦可說連分數 $<r_n>$ 的收斂值為 $\dfrac{5}{3}$

化成連分數的方法即***不留分子不為 1 的分數***

例1: 求 $\dfrac{99}{70}$ 的連分數表示？

例2: 求 $\dfrac{49}{23}$ 的連分數表示？

例3: 求 $\sqrt{2}$ 的連分數表示？並計算其漸近分數 r_n ，$0 \leq n \leq 5$，在與 $\sqrt{2} = 1.41421356$ 比較？

例4: 求 $\sqrt{5}$ 的連分數表示？並計算其漸近分數 r_n ，$0 \leq n \leq 5$，在與 $\sqrt{5} = 2.23606797$ 比較？

例5: 地球公轉一周為 365.2422 日，月球繞一周需時 29.5306 日，故一年有 12.368 月，亦即一年應多出 0.368…月，試求 0.368 的漸近分數，並說明農曆閏月的原則？

四、遞迴表示法

例1:　$1^2,2^2,3^2,4^2,...,n^2,...$，試求此數列的第 n 項 a_n，並用一遞迴式表示此數列？

例2:　設 $a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$，試以一遞迴式表示數列 $<a_n>$？

例3:　設 $a_n = 2\times\frac{2\times2}{1\times3}\times\frac{4\times4}{3\times5}\times.....\times\frac{2n\times2n}{(2n-1)(2n+1)}$，試以一遞迴式表示數列 $<a_n>$？

例4:　若數列 $<a_n>$ 滿足 $a_n>0$，且 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{k}{2a_n}$，其中 k 為固定正數，又假設數列 $<a_n>$ 收斂到一實數，試求此實數？（$\sqrt{k}$）

五、級數與歸納法

如果通項為 n 的 m 次式，則級數和為 n 的 $m+1$ 次式

例1:　求 $A_n = 1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)$ 的公式