線對線對稱

求 $a_1x+b_1y=c_1$ 對 $a_2x+b_2y=c_2$ 之對稱圖形方程式

$\boxed{\text{解}}$： $a_1x+b_1y=c_1$ 之參數式 $(t,\dfrac{c_1-a_1t}{b_1})$ ，設其對稱點為 (x,y)

由 1. $\left(\dfrac{x+t}{2},\dfrac{y+\dfrac{c_1-a_1t}{b_1}}{2}\right)$ 在 $a_2x+b_2y=c_2$ 上

2. (x,y) 與 $(t,\dfrac{c_1-a_1t}{b_1})$ 所成之直線垂直於 $a_2x+b_2y=c_2$

得 $\begin{cases} a_2\left(\dfrac{x+t}{2}\right)+b_2\left(\dfrac{y+\dfrac{c_1-a_1t}{b_1}}{2}\right)=c_2 \\ \dfrac{y-\dfrac{c_1-a_1t}{b_1}}{x-t}=\dfrac{b_2}{a_2} \end{cases}$

化簡得 $\begin{cases} a_2x+b_2y=\dfrac{1}{b_1}[(a_1b_2-a_2b_1)t+2b_1c_2-b_2c_1] \\ b_2x-a_2y=\dfrac{1}{b_1}[(a_1a_2-b_1b_2)t-a_2c_1] \end{cases}$

$$\begin{cases} (a_1a_2+b_1b_2)a_2x+(a_1a_2+b_1b_2)b_2y=\dfrac{1}{b_1}[(a_1b_2-a_2b_1)(a_1a_2+b_1b_2)+2b_1c_2(a_1a_2+b_1b_2)-b_2c_1(a_1a_2+b_1b_2)] \\ (a_1b_2-a_2b_1)b_2x-(a_1b_2-a_2b_1)a_2y=\dfrac{1}{b_1}[(a_1b_2-a_2b_1)(a_1a_2+b_1b_2)-a_2c_1(a_1b_2-a_2b_1)] \end{cases}$$

$$\boxed{(a_1a_2^2+2a_2b_1b_2-a_1b_2^2)x+(b_1b_2^2+2a_1a_2b_2-a_2^2b_1)y=2c_2(a_1a_2+b_1b_2)-c_1(a_2^2+b_2^2)}\cdots\cdots\cdots(1)$$

PS：若對稱之軸 $a_2x+b_2y=c_2$ 之斜率為 ±1 ，即 $\dfrac{-a_2}{b_2}=\pm1$

可令其為 $\dfrac{a_2}{b_2}x+y=\dfrac{c_2}{b_2}$ ，即 $A_2x+y=C_2$ 之型

故可令對稱之軸為 $a_2x+b_2y=c_2$ ，且 $|a_2|=1$ ， $b_2=1$ ，代入(1)式

得 $2a_2b_1b_2x+2a_1a_2b_2y=2c_2(a_1a_2+b_1b_2)-2c_1$

即 $b_1x+a_1y=c_2\left(\dfrac{a_1a_2}{a_2b_2}+\dfrac{b_1b_2}{a_2b_2}\right)-\dfrac{c_1}{a_2b_2}$

$b_1x+a_1y=c_2\left(\dfrac{a_1}{b_2}+\dfrac{b_1}{a_2}\right)-\dfrac{c_1}{a_2b_2}$ ，將分母化為平方

$b_1x+a_1y=c_2\left(\dfrac{a_1b_2}{b_2^2}+\dfrac{b_1a_2}{a_2^2}\right)-\dfrac{a_2b_2c_1}{a_2^2b_2^2}$

$b_1x+a_1y=c_2(a_1b_2+b_1a_2)-a_2b_2c_1$

$a_1b_2c_2-a_1b_2^2y+a_2b_1c_2-a_2^2b_1x=a_2b_2c_1$

$a_1(\frac{c_2-b_2y}{a_2})+b_1(\frac{c_2-a_2x}{b_2})=c_1$，可視爲由對稱之軸 $a_2x+b_2y=c_2$ 表示出 $x=\frac{c_2-b_2y}{a_2}$，$y=\frac{c_2-a_2x}{b_2}$ 再代入 $a_1x+b_1y=c_1$ 而得。

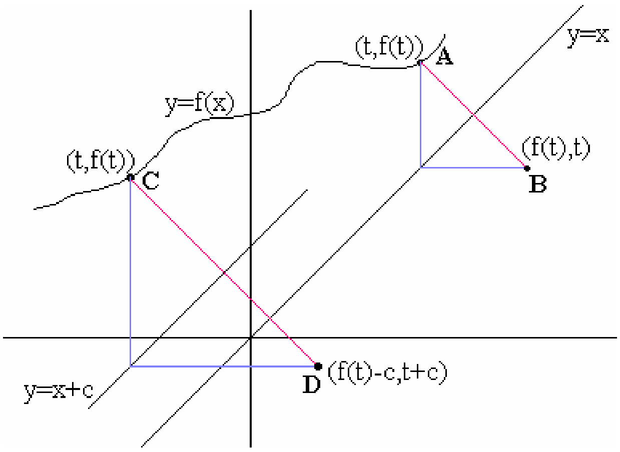
例1. 試求直線 $15x+2y+5=0$ 對直線 $x-y+1=0$ 之對稱圖形方程式？（ $2x+15y-8=0$ ）

例2. 試求直線 $3x+4y-9=0$ 對直線 $x+2y-3=0$ 之對稱圖形方程式？（ $7x+24y-21=0$ ）

例3. 試求直線 $2x+3y+5=0$ 對直線 $x-y=0$ 之對稱圖形方程式？（ $3x+2y+5=0$ ）

例4. 試求直線 $2x+3y+5=0$ 對直線 $x+y=0$ 之對稱圖形方程式？（ $3x+2y-5=0$ ）

例5. 試求直線 $3x+2y+8=0$ 對直線 $x-y+1=0$ 之對稱圖形方程式？（ $2x+3y+7=0$ ）



一. 如圖 $A(t,f(t))$ 對於 $y=x$ 的對稱點爲 $B(f(t),t)$

則 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=t \end{cases}$ 即 $x=f(y)$，即將 x 以 y， y 以 x 代入原式

二. 如圖 $C(t,f(t))$ 對於 $y=x+c$ 的對稱點爲 $D(f(t)-c,t+c)$

則 $\begin{cases} x=f(t)-c \\ y=t+c \end{cases}$ 即 $t=y-c$ 代入得 $x+c=f(y-c)$，即將 x 以 $y-c$， y 以 $x+c$ 代入原式