點線面之關係（補充資料）

一、　點到平面的關係

1. $P(x_0, y_0, z_0)$ 點到平面 $E: ax+by+cz+d=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

例 1：試求點 $P(2,2,4)$ 到平面 $E: 4x+y+8z+39=0$ 的距離？(9)

例 2：試求點 $P(1,3,5)$ 到平面 $E: 2x-3y+4z-8=0$ 的距離？

2. $P(x_0, y_0, z_0)$ 點到平面 $E: ax+by+cz+d=0$ 的投影點座標為

$P-\dfrac{E_p}{|\vec{n}|}\times\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

$=(x_0, y_0, z_0)-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\times(a,b,c)$

例 3：試求 $(3,1,-2)$ 對於 $2x+y-2z+7=0$ 之投影點座標？（$-1,-1,2$）

3. $P(x_0, y_0, z_0)$ 點到平面 $E: ax+by+cz+d=0$ 的對稱點座標為

2（投影點座標）-P

$=2\left((x_0, y_0, z_0)-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\times(a,b,c)\right)-(x_0, y_0, z_0)$

例 4：試求 $(3,1,-2)$ 對於 $2x+y-2z+7=0$ 之對稱點座標？（$-5,-3,6$）

二、　兩平面的交角平分面方程式

兩平面 $\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$ 的交角平分面方程式為

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1z+d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2z+d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

三、　點到直線的關係

令 $A(x_1, y_1, z_1)$，$\vec{L}=(a,b,c)$

1. $P(x_0, y_0, z_0)$ 點到直線 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ 的距離為 $\sqrt{\left|\overrightarrow{AP}\right|^2-\left(\overrightarrow{AP}\cdot\dfrac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right)^2}=$

$$\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2-\left[(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right]^2}$$

例 5：試求 $(2,-3,1)$ 對於 $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{4}$ 的距離？（$\sqrt{14}$）

2. $P(x_0, y_0, z_0)$ 點到直線 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ 的投影點座標為 $A+\left(\overrightarrow{AP}\cdot\dfrac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right)\times\dfrac{\vec{L}}{|\vec{L}|}$

$=(x_1, y_1, z_1)+\left[(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)\cdot\dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right]\times\dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

例 6：試求 $(2,-3,1)$ 對於 $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{4}$ 的投影點座標？（$3,0,-1$）

3. $P(x_0,y_0,z_0)$點到直線$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$的對稱點座標為

2（投影點座標）-P＝

$$2\{(x_1,y_1,z_1)+[(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}]\times\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\}-(x_0,y_0,z_0)$$

例 7：試求$(2,-3,1)$對於$\frac{x+2}{5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+5}{4}$的對稱點座標？（$4,3,-3$）

四、　兩歪斜線之距離

令$A_1(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{L}_1=(a_1,b_1,c_1)$，$A_2(x_2,y_2,z_2)$，$\vec{L}_2=(a_2,b_2,c_2)$

兩歪斜線$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$與$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$之距離為$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\frac{\vec{L}_1\times\vec{L}_2}{\left|\vec{L}_1\times\vec{L}_2\right|}\right|$