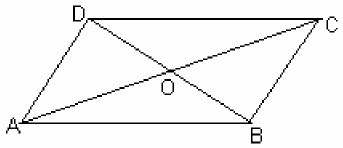
平行四邊形定理

平行四邊形 ABCD，O 為對角線的交點，則



$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$

$\boxed{\text{證明}}$：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$

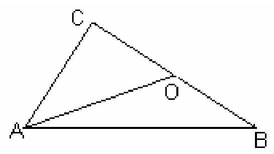
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{DB}\right|^2$$

所以 $2(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2)=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2$ ，即

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$

三角形中線定理



三角形 ABC 中，O 為 $\overline{BC}$ 中點，則 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\frac{1}{2}\overline{BC}^2+2\overline{AO}^2$

$\boxed{\text{證明}}$：根據平行四邊形定理，$2(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)=\overline{BC}^2+(2\overline{AO})^2$ ，即

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\frac{1}{2}\overline{BC}^2+2\overline{AO}^2$$